61.12.22

星形正多面体の構成

立花徹美（岩手大工）

1. はじめに

星形正多面体は凹多面体に分類され，正多面体と同様に，合同な星形正多角形が各頂点に同じ枚数ずつ集まると考えられるもの，あるいは合同な正多角形が，星形正多角形を底面とする合同な多面角をつくるように集まっていると考えるものをいう。[1] すなわち星形正多面体を構成する各面は，星形正五角形の面から成り立っていることから，星形正多面体の母体としては正12面体および正20面体が考えられる。

本稿においては，正12面体あるいは正20面体の正投象を基に，これらから星形正多面体を作図しそれらの構成を解析するものである。

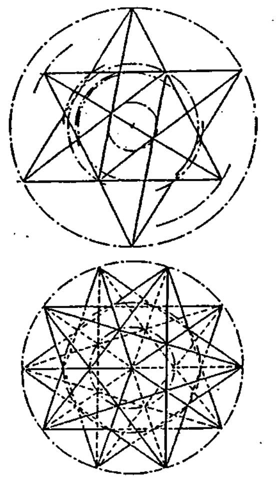

図 1 (a)

2. 解析

つぎに4種の星形正多面体についてそれぞれの構成を解析する。

2. 1. 小星形12面体（図 1）

この立体は，正12面体を母体とし，その各面を底とする正五角錐を母体の表面につけた形状をなし，12個の凸頂点と60面の2等辺三角形をもち，各面は正五角形の1辺とその辺に隣接する2辺の延長とでできる星形五角形の1面である。

図1は正12面体の1面を水平に置いた場合の小星形12面体の投象をしめす。図1において，正五角形の1辺（正12面体の稜長）をL，正五角形の外接円半径をR_1，正十角形の外接円半径をR_2とすると，平面図において

$R_1 = L / 2\cos 54^\circ$，$R_2 = R_1 + L(\cos 54^\circ + \cos 18^\circ)$

$R_2 =$ ~~$L(1+2\sin 54^\circ)/2\cos 54^\circ$~~ $\cdot\cos(180^\circ-\beta)$

輪郭をしめす10頂点を通る円の半径をR_3，母体正12面体の内接球半径をR_{ib}，小星形12面体の外接球半径をR_{01}とすると

$$R_3 = \frac{L}{2\tan 36^\circ} + \frac{L}{2\tan 18^\circ} = \frac{L(\tan 18^\circ + \tan 36^\circ)}{2\tan 18^\circ \cdot \tan 36^\circ}$$

$$R_{ib} = \frac{L}{2\tan 36^\circ}\cdot\tan\frac{\beta}{2} \fallingdotseq \frac{L\tan 58^\circ 17'}{2\tan 36^\circ}$$

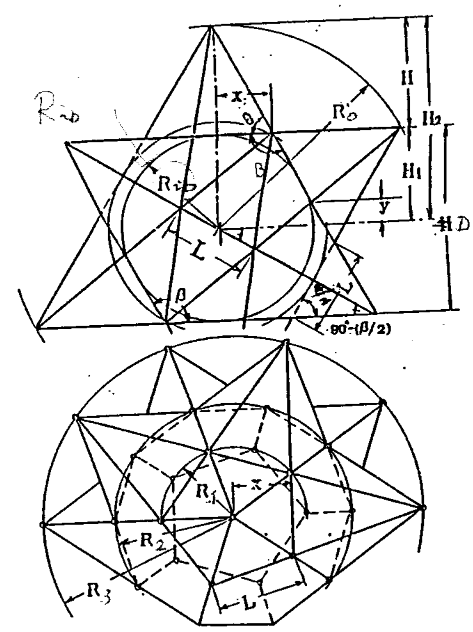

図 1 (b)

$$R_{01} = R_{ib} + H = \frac{L\tan\beta/2}{2\tan 36^\circ} + \frac{L\sqrt{\sin^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ}}{2\sin 18^\circ\cdot\sin 36^\circ}$$

ただし，Hは正角錐の高さで

$$H = \sqrt{\frac{L^2}{(2\sin 18^\circ)^2} - \frac{L^2}{(2\sin 36^\circ)^2}}$$

$$= \frac{L\sqrt{\sin^2 36^\circ - \sin^2 18^\circ}}{2\cdot\sin 18^\circ\cdot\sin 36^\circ}$$

また，$y = (L/2)\cos(\beta/2)$，$x = (L/2)\tan 54^\circ$

一方，$H = \dfrac{L\tan 54^\circ}{2}\cdot|\tan(180^\circ-\beta)|$

$= \dfrac{L\tan 54^\circ}{2}\cdot\tan \cancel{\beta}\,\theta$　ただし $\beta \fallingdotseq 116^\circ 34'$

$$H_1 = R_{ib} = l \tan\frac{\beta}{2} = \frac{L}{2}\tan 54°\cdot\tan\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore H_2 = H + H_1 = \frac{L}{2}\tan 54°\left(\tan\beta + \tan\frac{\beta}{2}\right)$$

母体となる正12面体の側面を底とする正五角錐の底角θは. $\theta = 180° - \beta \fallingdotseq 63°26'$

平行となる星形2平面間の距離 D は

$$D = 2ib = 2H_1$$

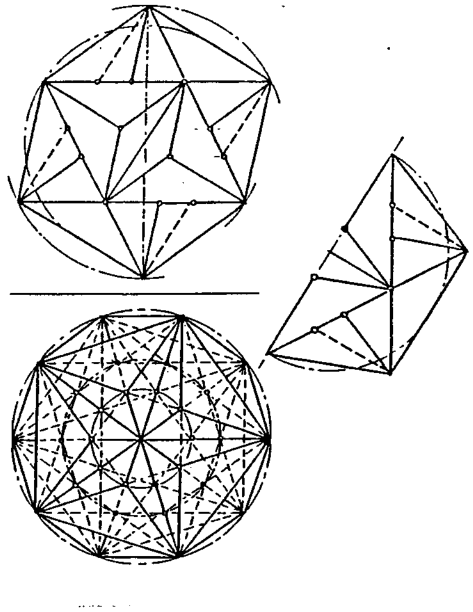

図2 (a)

2. 2 大型12面体 (図2)

図2(b)において. 星形五角形ACEBDAの交点からなる正五角形abcdaからみると. 大型12面体の母体は. この正五角形を1面とする正12面体であるが. 正五角形ABCDEAからみるとA. B, C, D, E ・・・等を頂点とする正20面体が母体となる。ここでは母体を正20面体にとると. 大型12面体の凸頂点数は正20面体の頂点数に等しい 12点, また, 凹頂点数は正20面体の各面上に1つずつあるので20項点となる。稜数は. 隣り合う凸頂点を結ぶ30本と. 凹頂点からでる3×20=60本との合計90本. 面数は凹頂点数の3倍数に等しい60面から成る。

図において. 星形五角形の外接円すなわち正五角形ABCDEの外接円半径をR_1, 正五角形abcdeの外接円半径をR, 残る凹頂点を連ねる円の半径をR_2, 正五角形ABCDEの1辺の長さをLとすると

$$R_1 = \cancel{\frac{L\sin 18°\cdot\tan 54°}{2\sin 36°} + \frac{L\cos 18°}{2\sin 36°}}$$

$$R_1 = L/2\sin 18°$$

$$= \cancel{L(\sin 18°\cdot\tan 54° + \cos 18°)/2\sin 36°}$$

$$R = L\sin 18°/2\sin 36°\cdot\cancel{\frac{\cos 36°}{\sin 36°}}$$

$$R_2 = R_1 - 2l,\quad l = L/2\tan 72°,$$

$$\therefore R_2 = R_1 - (L/\tan 72°)$$

星形五角錐を底とする星形五角錐の高さをhとすると

$$h = \sqrt{L^2 - R_1^2} \quad \text{または} \quad h = L\sin\theta$$

ただし $\cos\theta = R_1/L$, $\therefore \theta = \cos^{-1}(R_1/L)$

平行な2つの星形五角形間の距離をDとすると

$$D = 2H_1 = 2\cos 18°\cdot\sin\alpha\cdot L \quad ''$$

ここにαは. $\alpha = \cos^{-1}\{(1 + 4\sin 18°)/3\}$

外接球の半径R_0は. 正20面体のそれに等しいので

$$R_0 = H = (\sin 36° + \cos 18°)\sin\alpha\cdot L \quad ''$$

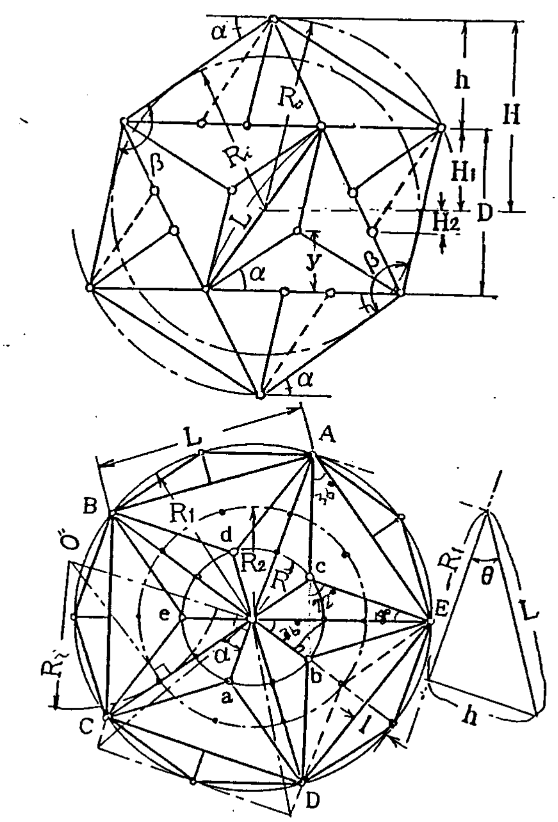

図 2(b)

$$H_1 = L\cos 18°\cdot\sin\alpha$$

$$\tan\alpha = y(R\cos 36° + R_2\cos 72°)$$

$$\therefore\ y = (R\cos 36° + R_2\cos 72°)\tan\alpha\ ?$$

$$H_2 = H_1 - y$$

2. 3　大星形12面体

図3は母体の正20面体の1主対角線を水平面に直立して置いた場合，これより得られる大星形12面体の正投影をしめす。この凸凹多面体の1側面は，正20面体の側面の正三角形を底とする正三角錐の側面から成る。そして正20面体の1頂点に会う5つの正三角形を側面とする正五角錐の底，すなわち正五角形の1つ置きの2辺の延長の交点を頂点とする星形五角形の面からできている。

図において　　$\cos 36° = \frac{R_2/2}{R_1}$

$R_1 = L / 2\cos 54°$, $R_2 = 2R_1 \cos 36° = L \tan 36°$

$$R_3 = R_1 \cos 36° + \frac{L}{2\tan 18°} = \frac{L(1+\tan^2 18°)}{2\tan 18°}$$

隣り合う2つの正三角錐側面の2面角をγとすると

$$\cos\gamma = \frac{R_1 \cos 36°}{L/2\tan 18°} = \frac{\cos 36° \tan 18°}{\sin 36° \cancel{(1+\tan^2 18°)}}$$

$$\cancel{\therefore \gamma = \cos^{-1}\{\tan 18° / \sin 36°(1+\tan^2 18°)\}}$$

$$\cancel{h_3 = R_3 - R_1 \sin 54°}$$

主対角線を水平投象面に垂直におく正20面体のその対角線の1端からでる5面の水平傾角は相等しく，これをαとすると

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3\tan 36°} \\ &h_1 = \frac{\sqrt{3}L}{3\sin\alpha},\quad h_2 = \frac{\sqrt{3}(2-3\sin^2\alpha)}{6\sin\alpha}L \end{aligned}\right]^{1)}$$

$h_4 = h_2 + h_3$,　$h_3 = h_4 - h_2$

$A = R_3 \cos 18°$,　$B = R_3 \cos 54°$

$C = R_1 \cos 18°$　　　$R_3 = R_1 \cos 36° + \frac{L}{2\tan 18°}$

円周(R_2)上の p を頂点とする三角錐について $\overline{Op}$ を副基線とし，副直立投影を考え，Δpab の水平傾角γ，底Δabcの水平傾角α，とすると三角錐の底角δは $\delta = 180° - (\alpha+\gamma)$ となり，三角錐の高さHは次式より求められる。

$$H = \ell \sin\delta = \frac{R_1 \cos 36°}{\cos\gamma} \sin\delta$$

従って大星形12面体の外接球半径 R_o は

$$R_o = h_2 + H$$

以上の各式を用いることにより，大星形12面体の20この凸頂点の座標および12この凹頂点(母体となる正20面体の頂点)の座標を求めることができる。

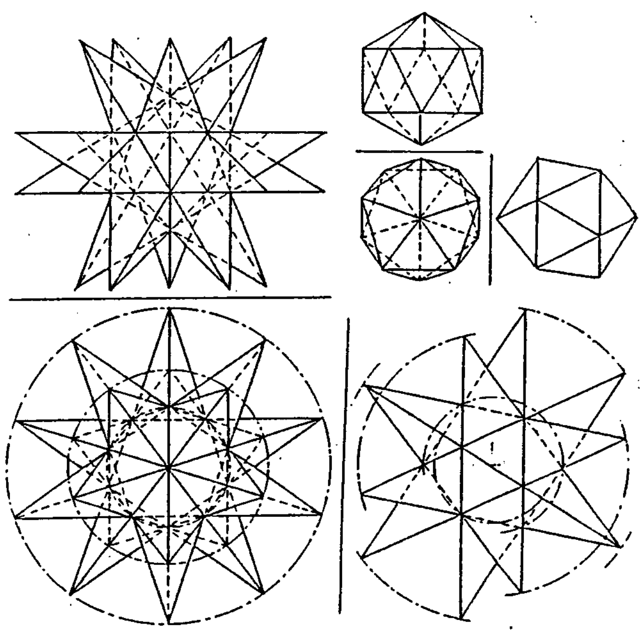

図3 (a)

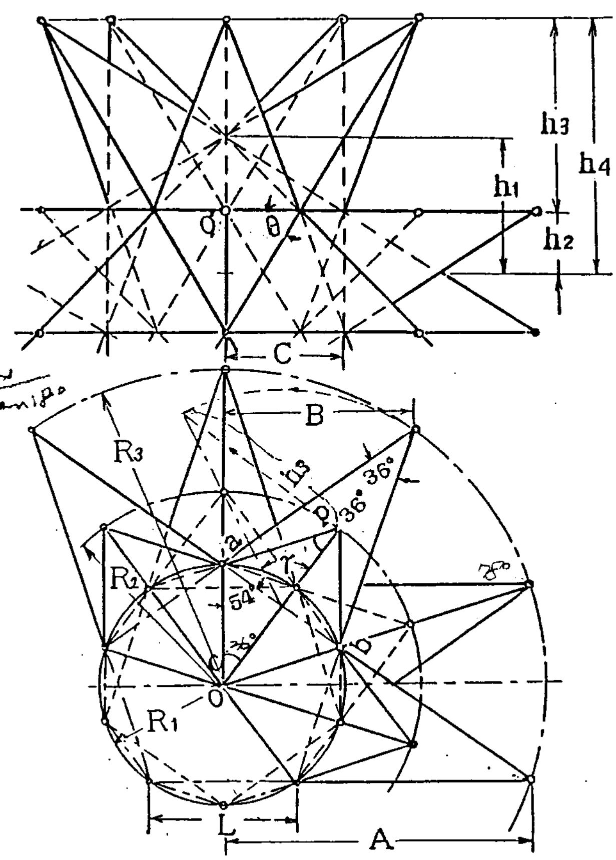

図3 (b)

2．4　大型20面体

図4は，1面を水平面上に置く正12面体を母体とする大型20面体の投象をしめす。正12面体の側面の正五角形内にできる星形五角形を底とし，その中心を通る垂線上に頂点をおく星形角錐が正12面体の各面上に外向につけられた形状をなし，この正五角形の1つ置きの2辺の延長の交点が星形角錐の頂点となる。また，正五角形の5頂点と上述の2辺の延長線の交点とできる5頂点とで，大きな星形五角形ができている。従って大型20面体は小星形12面体の正五角錐の底を星形五角形にしたものといえる。

頂点数は，凸12，凹80，計92，稜数270

面数は，星形五角錐の側面として三角形120，母体の正12面体面上に二等辺三角形60，計180。

図4において，母体とする正12面体の稜長をLとすると，正五角形の外接円半径R_1は

$$R_1 = L/2\cos 54^\circ = L/2\sin 36^\circ$$

母体の正12面体の輪郭をしめす正十角形への外接円半径R_2は

$$R_2 = R_1 + L(\cos 54^\circ + \cos 18^\circ)\cos(180^\circ - \beta) \quad \cancel{(1+2\sin 54^\circ)L/2\cos 54^\circ}$$

10この星形角錐の頂点を通る円の半径R_3は

$$R_3 = \cancel{L\cos 36^\circ / 2\sin^2 36^\circ}\ \frac{L}{2\tan 36^\circ} + \frac{L}{2\tan 18^\circ}$$

上・下面上の小星形五角形の凹頂点を通る円の半径rは

$$r = R_1 \sin 54^\circ - \frac{L}{2}\tan 36^\circ = \frac{L}{2}(\tan 54^\circ - \tan 36^\circ)$$

また，正12面体の2面角 $\beta_b \fallingdotseq 116^\circ 34'$より，上下面を除く10側面(正五角形の水平傾角：$180^\circ - \beta_b$)上の小星形五角形の凹頂点を求めることが可能となる。

正12面体の内接球半径R_{ib}は

$$R_{ib} = \frac{L}{2}\tan 54^\circ \tan\frac{\beta}{2} = H_1$$

星形角錐の高さは，小星形12面体の場合と等しくなり，

$$H = \frac{L\sqrt{\sin^2 36^\circ - \sin^2 18^\circ}}{2\sin 18^\circ \cdot \sin 36^\circ} \quad \text{or}\ H = L(\cos 54^\circ + \cos 18^\circ)\cdot\sin(180^\circ - \beta)$$

大型20面体の外接球の半径をR_0とすると，

$$R_0 = H_2 = H_1 + H$$

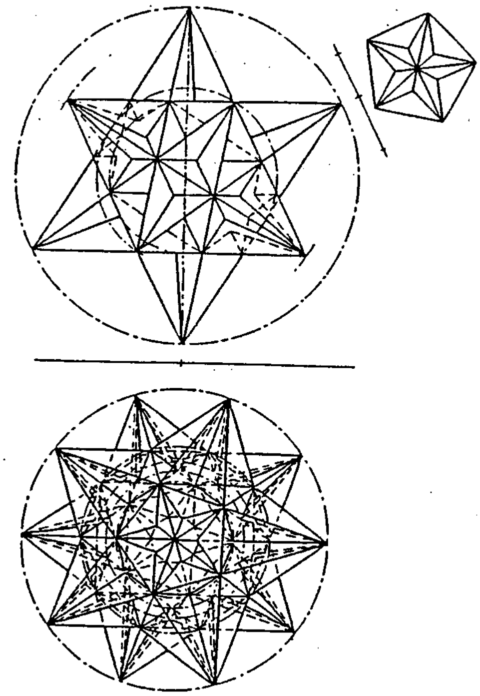

図4 (a)

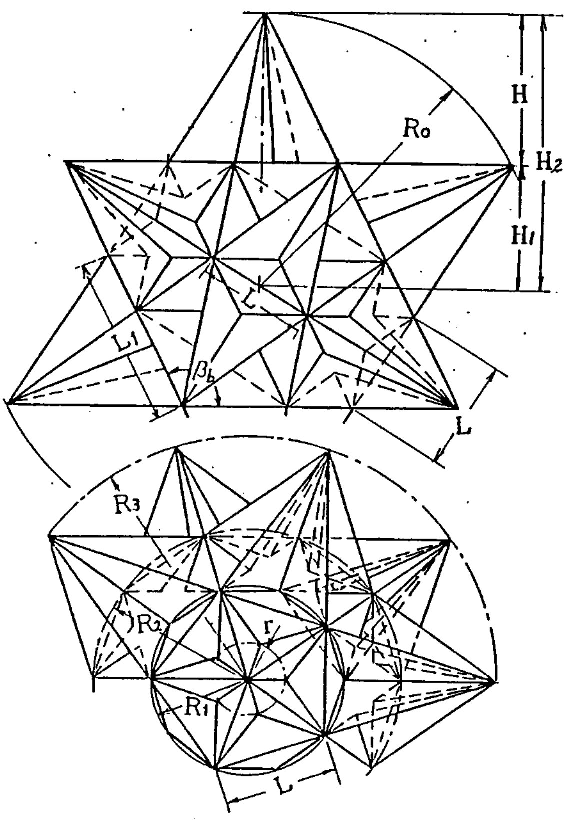

図4 (b)

3．結果及び考察

本研究においては4種の星形多面体について、1つの基本的姿勢にある場合の正投象図を描き、それらについて各頂点の座標、外接球の半径等を求める関係式を導いた。

母体となる正多面体は、小星形12面体では正12面体、大型12面体、大星形12面体には正20面体、大型20面体には正12面体を用いた。これは、立体的表示をしている参考図 2)を参照し、各星形多面体の構成が得られ易いように、母体とする正多面体を選んだためである。

任意の姿勢におけるこれら星形多面体の投象をコンピュータにより描かせるためには、さらに、隠線処理が問題として残る。

参考文献

1) 立花徹美，パソコンによる正多面体の図形処理，岩手大学工学研究報告，Vol.37，1984

立花・藤田，パソコンによる図形処理（正12面体・正20面体の関連図の作図），日本図学会，図学研究，第36号，昭和60年3月

2) 中村貞男，大学課程 図説図学，オーム社，(第1版)，昭和44年12月

日本図学会編，図形科学ハンドブック，森北出版，1980．6