透視変換マトリックスに関する一考察

東北工業大学　飯塚真人
東北工業大学　佐藤仁一朗

1　はじめに

3次元上にある物体を、2次元に変換する方法はいくつかある。今回はそのなかで、行列を使った計算方法で3次元から2次元に変換を行うことを考えてみる。

3次元の物体を、移動、回転、反転、透視変換などの変換を行列を用いる方法で行ってみる。また、それを利用して複数の変換を行う場合を考え、行列で表しそれを実際にコンピュータで計算させ作図をさせてみる。

また、変換の値を変えながら、実際に透視変換の結果がどのように変化しているかを調べてみる。

2　座標系について

3次元の変換を行う場合は $(3+1)$ 次元の斉次座標を使う。この座標系を使った場合は点 $P(x,y,z)$ は (hx,hy,hz,h) と表す。点を変換する変換行列は 4×4 の行列を使う。変換行列を (T) とすると、点 $P(x,y,z)$ を変換させるには、

$$(x,y,z,1)(T)=(x',y',z',h)$$

という式で表すことができる。変換後の点 (x',y',z',h) は斉次座標表示なので標準の座標系に戻すには x',y',z'をそれぞれ h で割ればよい。$\left(\frac{x'}{h},\frac{y'}{h},\frac{z'}{h}\right)$となる。

3　基本的な3次元の変換行列

基本的な変換行列を以下に示す。

3.1 平行移動

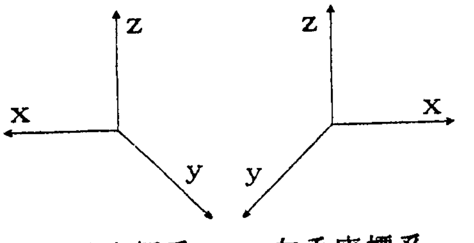
ある点 $P(x,y,z)$ を x 軸方向に l、y 軸方向に m、z 軸方向に n 移動するには、

$$(T_t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{pmatrix}$$

という行列を用いればよい。

3.2 軸の回りの回転

回転の場合は、座標系が右手座標系か左手座標系かということと、回転の方向が重要になる。



右手座標系　左手座標系

ここでは、右手座標系を使い、回転の方向は座標軸に対して右ネジの方向を正とする。
それぞれの軸を中心に角度θ回転させる変換行列はそれぞれ以下のようになる。
x 軸の回りの回転は、

$$(T_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y 軸の回りの回転は、

$$(T_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z 軸の回りの回転は、

$$(T_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

3.3 透視変換

一般的な 4×4 斉次座標系変換行列の、4 番目の列の最初の 3 つの要素のいずれかが 0 でない時、透視変換となる。投影中心を y 軸上の点 $(0,d,0)$ とした時の透視変換の変換行列は、

$$(T_r)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{d}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

となる。この式では、y 軸方向の座標が残っているので、結果を xz 平面に平行投影することで最終的に平面に投影される。
xz 平面への平行投影の変換行列は、

$$(T_h)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

であるので、xz 平面への透視変換は、

$$(T_p)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{d}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

という変換行列で行うことができる。

3.4 複合変換

連続する変換は、組み合わせたり連結することで、同じ結果を与える 1 つの 4×4 変換行列を生成出来る。

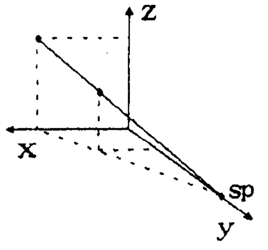
$$(T)=(T_1)(T_2)(T_3)\cdots$$

行列の乗算は可換ではないので、順序が重要である。

$$(A)(B)\neq(B)(A)$$

(T_i) は、回転、平行移動、透視変換などの、変換行列の任意の組み合わせである。

4 物体の透視変換



上図のような座標系があり、画面を xz 平面、投影中心を y 軸上の原点から距離 d の位置とする。ここでは物体の変換を以下のように行う。

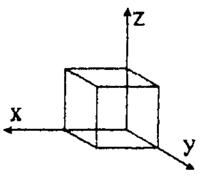
1. 物体を z 軸を中心にして時計回りに角度 Q 回す。
2. 物体を x 軸を中心にして時計回りに角度 S回す。
3. 物体を x 方向に距離 a、y 方向に距離 b、z 方向に距離 c、平行移動する。
4. 投影中心 sp から、画面 xz 平面に透視変換する。

上のような順序による複合変換で得られる行列は、

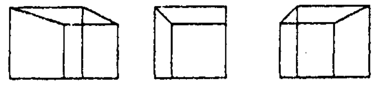
$$
\begin{aligned}
(T) &= (T_z)(T_x)(T_t)(T_p) \\
&= \begin{pmatrix} \cos Q & \sin Q & 0 & 0 \\ -\sin Q & \cos Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos S & \sin S & 0 \\ 0 & -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos Q & 0 & \sin Q \sin S & -\frac{\sin Q \cos S}{d} \\ -\sin Q & 0 & \cos Q \sin S & -\frac{\cos Q \cos S}{d} \\ 0 & 0 & \cos S & \frac{\sin S}{d} \\ a & 0 & c & 1 - \frac{b}{d} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

のような行列になる。

この変換行列で、次の図のような状態にある一辺の長さが 50 の立方体を変換したときの、各パラメータを変化させた透視図は以下のようになる。

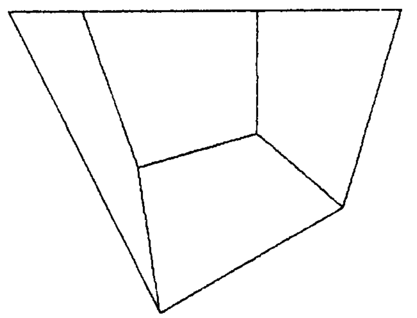


$b=0, c=0, d=200, Q=0°, S=0°$として、物体の x 軸方向の平行移動のパラメータ、aの値を変化させてみる。

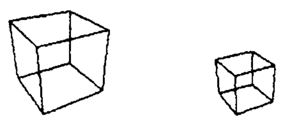


a=100　a=0　a=-100

$a=0, c=0, d=200, Q=30°, S=-30°$として、物体の y 軸方向の平行移動のパラメータ、bの値を変化させてみる。

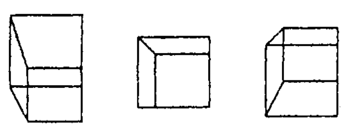


b=100



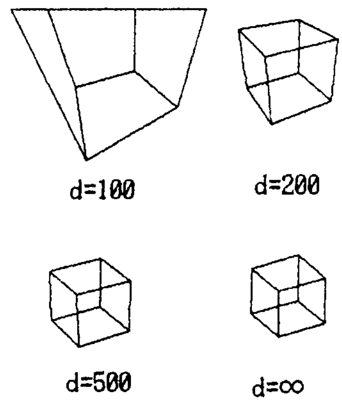
b=0　b=-100

$a=0, b=0, d=200, Q=0°, S=0°$として、物体の z 軸方向の平行移動のパラメータ、cの値を変化させてみる。

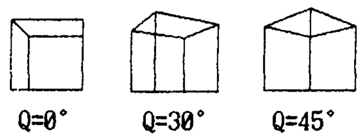


c=100　c=0　c=-100

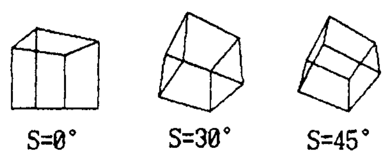
$a=0, b=0, c=0, Q=30°, S=-30°$として、y 軸上の投影中心と原点との距離のパラメータ、dの値を変化させてみる。



$a=0, b=0, c=0, d=200, S=0°$として、物体のz軸回りの回転のバラメータ、$Q$の値を変化させてみる。



$a=0, b=0, c=0, d=200, Q=30°$として、物体のx軸回りの回転のバラメータ、$S$の値を変化させてみる。



5　まとめ

この研究により透視変換マトリックスの特徴がわかった。
行列の乗算は可換ではないので、複合変換行列の場合も、変換の順番が重要になってくる。順番を入れ換えるとまったく違った結果になってしまうこともある。

しかし、あらかじめ変換の順番が決まっているのなら、変換の行列を組み合わせることによって、1つの複合変換行列を導き出しておくことができる。
変換の順番が決まっていない場合でも、いくつかの基本的な変換行列を用意しておけば、それらを組み合わせることによって目的の変換が得られる。コンピュータなどを使えば更に簡単に複合行列を得ることができる。

参考文献

1. Lu Congda and Jia Shuanggen: MATRIX OF PERSPECTIVE TRANSFORMATION WITH APPLICATION FOR COMPUTER GRAPHICS,Proceedings of the 5th International Conference on ENGINEERING COMPUTER GRAPHICS AND DESCRIPTIVE GEOMETRY,Volume 2, 1992, P.527~530.

2. David F. Rogers and J. Alan Adams: コンピュータグラフィックス, 日刊工業新聞社, 1993.

3. 出口光一郎: 画像と空間, 昭晃堂, 1991.