自由曲線・曲面の滑らかさの理論および評価方法の考察と 3 次元 CAD への応用

高三徳　渡邉昌明　吉田貞彦　桜井俊明　五十嵐三武郎
いわき明星大学理工学部機械工学科

要旨：複雑な自由曲線･曲面の高品質化デザインのためには，形状の滑らかさを定量的に正確に評価する手法が不可欠である．本論文では，自由曲線･曲面の連続性の理論および実際の滑らかな形状の設計条件を述べ，3 次元 CAD ソフトシステムに取り込まれている曲率分布とハイライトによる滑らかさの評価方法について考察を行った．また，曲率分析法，環境マッピング法，ゼブラマッピング法などの評価方法をマウスボディーモデリングへの応用を試みた．これらの方法は対話型設計にチェック機能として有効であるが，設計のプロセスと連動させ，評価と修正が自動的に行うことによって，設計作業時間が大幅に短縮されることが期待される．

キーワード：CAD/CAM，自由曲線･曲面，滑らかさ，評価方法

１．はじめに

従来の工業製品には，球や円柱や直方体などのプリミティブな形状を基本とするものが多かった．最近，デザインにおいて，単に製品の機能面だけではなく，感覚的にも心理的にもリラックスできるような柔らかい感じが好まれる傾向になってきた．このため，家電製品をはじめとして，通信機器，自動車，電車，飛行機，ビルディングなどの工業製品の形は滑らかな曲面で構成されるようになってきている．これは自由曲線や自由曲面と呼ばれる表現方法が開発され，これらが3次元 CG や CAD，CNC（コンピュータ数値制御）システムに組み込まれてきた結果によるものである．

自由曲線や自由曲面は形状の表現性，制御性および接続性に優れ，設計者の意図する形状を忠実に表現でき，形状変更が容易で，複数の曲線や曲面の接続を滑らかにできる．Ferguson 曲線をはじめ，Coons 曲面，Bezier 曲線･曲面，Spline 補間曲線･曲面，Ｂ－スプライン曲線･曲面，さらに制御性が改善された有理 Bezier 曲線･曲面，有理Ｂ－スプライン曲線･曲面，NURBS(非一様な有理Ｂ－スプライン) 曲線･曲面が発表され，今日に至っている [1), 2)]．現在，CG や CAD ソフトの自由曲線･曲面の機能を用いて，デザイナーが自分の感覚により制御点あるいは補間点，端点条件などで自由な形状を定義することが簡単になっている．しかし，高品質の複雑な曲線･曲面のデザインのために，形状の滑らかさを定量的に正確に評価する手法が不可欠である．

そこで，本研究では，自由曲線･曲面の滑らかさの理論，実際の滑らかな形状の設計条件を述べ，滑らかさの評価方法の考察とその応用を行った．

２．滑らかさの理論

滑らかさ（smoothness あるいは fairness）とは，円滑さや流暢さの意味で，デザインでは流線型形状の幾何表現に使用される．形状の滑らかさは見た目だけでなく，多くの物理的機能との内在的な関連もある．たとえば，高速ロボットの運動において，運動経路が滑らかな曲線であれば，運動慣性，振動，衝撃が少ない．車両や飛翔体のボディーが滑らかな曲面であると，その曲面のプレス工程中の材料変形挙動がよく，しわや割れが発生しにくく，塗装光沢が均一で，高速運動中の流動性に優れる．

自由曲線･曲面は曲率が一定ではなく，その変化が均一なほど滑らかさが良い．図 1 に船体曲線の曲率変化を示す [3)]．曲線に垂直な直線線分の長さは曲線の曲率の大きさに比例する．図中(a)の曲線は(b)の曲線より滑らかであることが分かる．

自由曲線をパラメトリック曲線 p(t) = [x(t), y(t), z(t)]で表すと，曲線の曲率は次式で求まる．

$$k(t) = \frac{\left|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)\right|}{\left|\dot{\vec{p}}(t)\right|^3} \qquad (1)$$

ここで，t はパラメータ，$\dot{\vec{p}}(t)$ と $\ddot{\vec{p}}(t)$ は曲線の1階と2階微分である．この式によると，滑らかな曲線は幾何的には接線方向および曲率の変化が滑らかであ

〒970-8551　いわき市中央台飯野５－５－１　　E-mail: sande@iwakimu.ac.jp

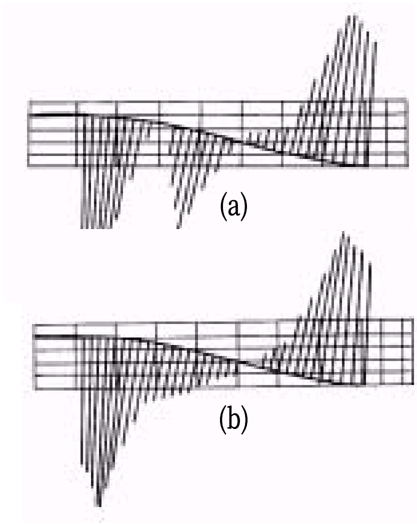


図１ 船体曲線の曲率変化

り，解析には1階および２階微分の変化が滑らかである．曲率は曲線の滑らかさを総合的に表すことが分かる．また，曲率の逆数は曲率半径となる．

自由曲面は自由曲線（単パラメータt）を双パラメータ（u，v）に拡張されたもので，その滑らかさは曲面の主曲率，ガウス曲率，平均曲率などで表現できるが，これらの曲率の計算が複雑であるので，通常，曲面の縦横断面線の曲率で評価することが多い．また，実際に自由曲面のデザインする際，境界線や断面線により曲面を定義することが多い．この場合には，これらの線が滑らかであれば，定義した曲面も滑らかになる．

より複雑な曲線（曲面）は複数の曲線（曲面）を継ぎ合わせることで構成される．隣り合う2つの曲線（曲面）が滑らかに接続される条件としては，その接続点（接続線）において，解析的に微分（偏微分）可能であるような連続性（1階，2階微分連続，いわゆる C^1，C^2 連続），または，幾何的に滑らかであるような連続（接線方向連続，曲率連続，いわゆる G^1，G^2 連続）を持つことである．例として，Bezier および B-Spline 曲線･曲面の接続連続性を挙げる．

（1）Bezier 曲線の連続条件

図2に示すように，2本の3次Bezier曲線 $P_1(t)$ および $P_2(t)$ がそれぞれ制御点 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 および Q_5，Q_6，Q_7，Q_8 により定義される．Bezier 曲線の性質 2)により，$P_1(t)$ は Q_1 と Q_4 の制御点をそれぞれ起点と終点とした曲線で，Q_2 と Q_3 の制御点を通らない．ベクトル Q_1Q_2 と Q_3Q_4 がそれぞれ曲線の起点と終点で曲線と接する．同様に $P_2(t)$ もこのような性質をもつ．したがって，Q_5 と Q_4 が共有点であれば，$P_1(t)$ と $P_2(t)$ は C^0 または G^0 連続（位置のみ連続）である．さらにベ

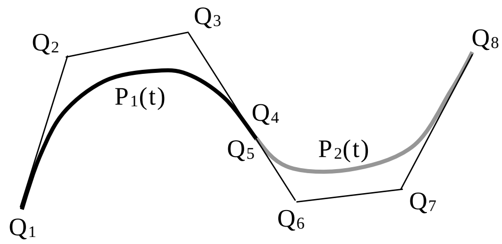


図2 Bezier 曲線の連続性

クトル Q_3Q_4 と Q_5Q_6 を一直線上に配置すると，連続性が G^1 になる．また，ベクトル Q_3Q_4 と Q_5Q_6 の長さを等しくすると，連続性が C^1 になる．しかし，3次 Bezier 曲線の G^2 と C^2 は直接に制御点によりコントロールできない．

（2）B-Spline 曲線の連続条件

図3に2本の3次 B-Spline 曲線を示す．1本目は Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 の四つの制御点により定義される P_1 から P_2 までの曲線である．B-Spline 曲線の性質 2)により，曲線の起点 P_1 は平行四辺形 $Q_1D_1Q_3Q_2$ の対角線 Q_2D_1 上に位置し，Q_2 までの距離がこの対角線の長さの 1/6 である．P_1 での接線ベクトル T_1 は同一の平行四辺形の対角線 Q_1Q_3 に平行で，長さがこの対角線の長さの1/2である．また，P_1 での2階微分ベクトルは同一の平行四辺形の対角線ベクトル Q_2D_1 に等しい．同様に，1本目の曲線の終点 P_2 でも平行辺角形 $Q_2D_2Q_4Q_3$ において，上述のような特性がある．一方，2本目の B-Spline 曲線は Q_2，Q_3，Q_4，Q_5 の四つの制御点により定義される P_2 から P_3 までの曲線である．この曲線の起点の特性を表す平行辺角形 $Q_2D_2Q_4Q_3$ が1本目の曲線の終点の特性を表す平行四辺形と同じである．すなわち，2本目の曲線の起点と1本目の曲線の終点の位置，接線，2階微分ベクトルがそれぞれ同じである．したがって，2本の曲線の連続が自動的に G^2 と C^2 になっている．

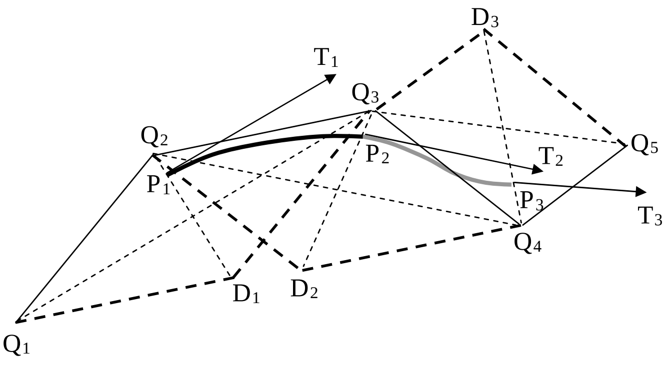


図3 B-Spline 曲線の連続性

(3) Bezier 曲面の連続条件

図4に2枚の Bezier 双3次曲面示す[1]. 各枚の曲面が4行×4列 (16 個) の制御点からなる. 曲面の境界での C^0 と G^0 連続性は4つの共有制御点を等しくすることによって作成される. 共有エッジのどちらの側の 4 つの制御点の2組がそのエージ上の点と同一線上にあるときに, G^1 の連続性が生じる. 各組の線分の長さが全て同一比率を持つと, 滑らかさがよくなる. その比率が1となると, C^1 連続になる.

(4) B-Spline 曲面の連続条件

図5に3枚の B-Spline 双3次曲面 $P_{ij}(u, v)$, $P_{i+1, j}(u, v)$, $P_{i, j+1}(u, v)$ を示す [2]. 各枚の曲面が4行×4列 (16 個) の制御点からなる. 曲面 $P_{ij}(u, v)$ は制御点 $Q_{m, n}$ (m=i-1, …, i+2; n=j-1, …, j+2) により定義される. 制御点の行列を一列だけずらす (m=i, …, i+3 である) と, 曲面 $P_{i+1, j}(u, v)$ が定義される. または, 制御点の行列を一行だけずらす (n=i, …, i+3 である) と, 曲面 $P_{i, j+1}(u, v)$ が定義される. 曲面 $P_{ij}(u, v)$ と $P_{i, j+1}(u, v)$, $P_{ij}(u, v)$ と $P_{i+1, j}(u, v)$ は自動的に G^2 と C^2 連続になる.

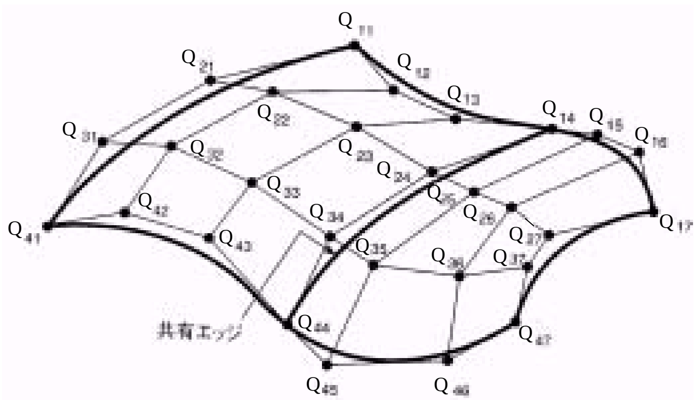


図4 Bezier 曲面の連続性

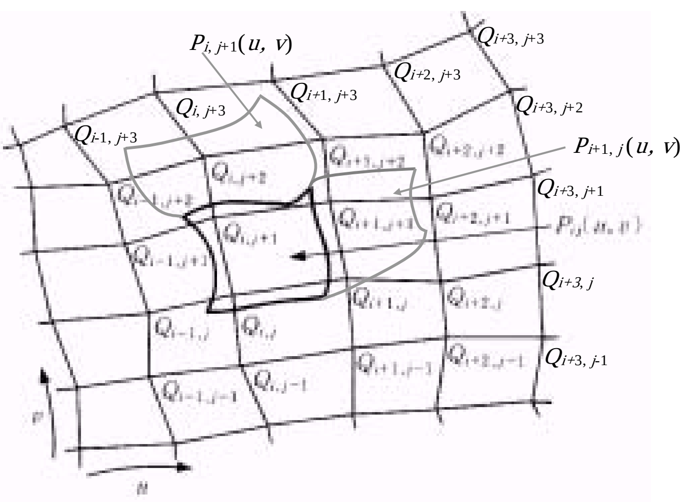


図5 B-Spline 曲面の連続性

3. 滑らかさの評価方法と CAD への応用

曲線･曲面の滑らかさの評価および修正方法として, 最小二乗法, スプライン法, エネルギー法, 円率法, 磨き法などがある[4]. これらの方法には滑らかさの目標関数および修正箇所の違いがある. 早期の最小二乗法とスプライン法は弾性梁スプライン関数に基づいて, 曲線上点でのせん断力の変化により滑らかさの目標関数を構築する. 近年, エネルギー法が盛んになっている.

エネルギー法はせん断力の替わりに, 曲線･曲面のひずみエネルギーを用いて滑らかさの目標関数を定義する. 例えば, 薄板の弾性ひずみエネルギーUは次式で表される[5].

$$U = c\iint \left\{ \left[\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \right]^2 - 2(1-\upsilon)\left[\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} \right)^2 \right] \right\} dudv \tag{2}$$

ここで, S(u, v)は変形した薄板の曲面方程式, u と v はパラメータ, c は定数, υはポアソン比である. 微小変形の場合には, 弾性ひずみエネルギーU はパラメータ u と v 方向の主曲率 k_u と k_v により次式で近似的に求まる.

$$U = \iint (k_u{}^2 + k_v{}^2) dudv \tag{3}$$

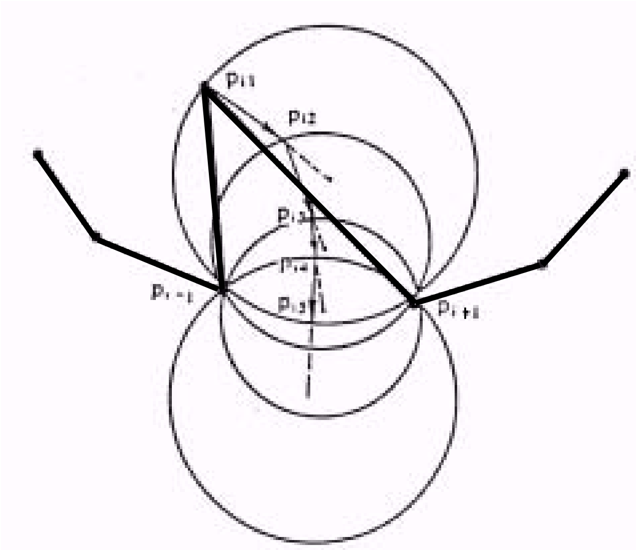
一方, 修正した曲面の変形 (元の曲面 $S_0(u, v)$との差) も次式のように許容範囲δ内に拘束される.

$$\iint [S(u,v) - S_0(u,v)]^2 dudv < \delta \tag{4}$$

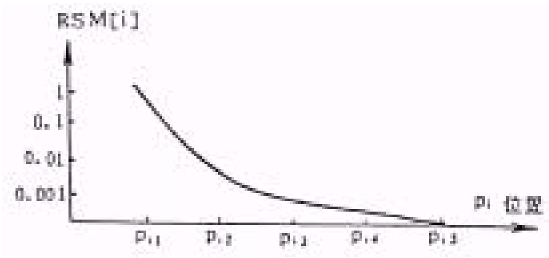
エネルギー法のような方法は全体修正法である. すなわち, 曲線･曲面上のすべての点の位置が調整される. しかし, 曲線･曲面の一部の形状が既に固定されて変更できなく, 特定の場所に限り調整する場合には, 全体修正法が適用できなくなり, 局部修正法が必要となる. 著者が曲率差分を用いた局部修正法を提案した [6]. この方法で曲線上の点 (補間点) p_i での曲線の滑らかさの評価関数RSM[i]は点 p_{i-1}, p_i, p_{i+1} での曲率 k_{i-1}, k_i, k_{i+1} の関数として次のようである.

$$RSM[i] = (k_{i+1} - k_i) / \left| \vec{p}_{i+1} - \vec{p}_i \right| - (k_i - k_{i-1}) / \left| \vec{p}_i - \vec{p}_{i-1} \right| \tag{5}$$

点 p_i の修正過程は図 6(a)に示す. その数値計算は



(a) 修正方向



(b) 修正目標

図6 曲率差分法の原理図

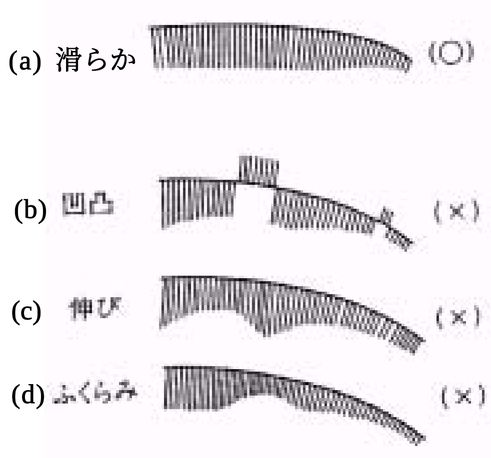


図7 曲率分布図[7)]

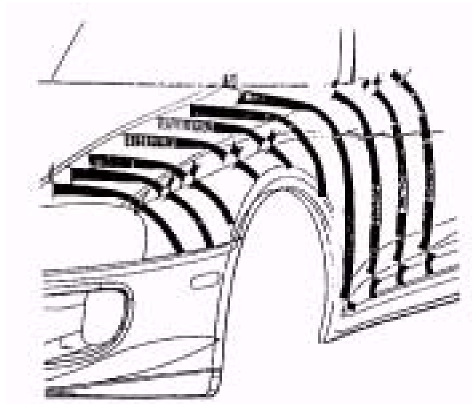


図8 カーボディーの曲率プロファイル[7)]

p_{i-1}, p_i, p_{i+1} を通る円の中心に向かい, $p_{i1} \rightarrow p_{i2} \rightarrow p_{i3} \rightarrow p_{i4} \rightarrow p_{i5}$ のような経路で行われる. 図6(b)に示すように, RSM[i]→0 になると, 滑らかの条件を満たしたと判断され, 修正過程を終了させる. 曲面の滑らかさを修正する場合には, 上述の修正過程をパラメータ u と v 方向に交替で繰り返して行う.

現在, 多くの 3 次元 CG, CAD のソフトシステムに曲線･曲面の滑らかさの評価機能は取り込まれている. 曲面の曲率変化を評価するためのハイライト処理, シェーディングイメージ, 断面線, 反射線, シルエット線などの解析機能が自由にできるソフトが市販されている. コンピュータのグラフィックス画面上で曲線･曲面の評価が容易に行われる. 例として, 自由曲面 CAD によく使われる曲率分布とハイライトによる評価方法を述べる[7)].

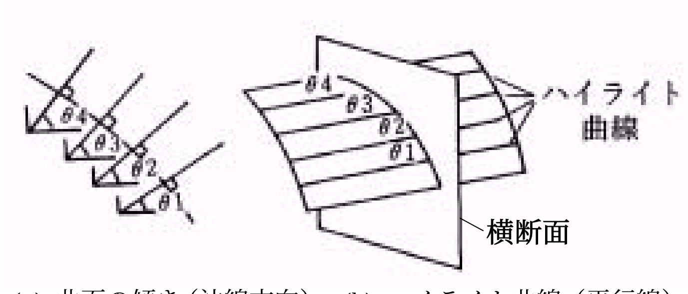
(1) 曲率分布による評価方法

図7に示すように, 曲線や曲面の断面線に垂直な直線線分で曲率分布を表す. 線分は方向が曲率半径の方向と一致し, 長さが曲率の大きさに比例する. 図7(a)のように, 曲率分布が滑らかであれば曲線も滑らかとされる. そうではないと, 同図(b), (c), (d) に示すように, 曲線に凹凸, 伸び, ふくらみなどが存在すると判断される.

図8は車のボンネット, 左フェンダパネル部, 左ドア部のそれぞれの断面線の曲率分布 (曲率プロファイル) を示す. その3者の各部品間の滑らかさが判定できる. フェンダ部に凹凸があるのはブリュースタという ダイナミックさを表現したもの, 同様に左ドア部にも凹凸があるのはリアにあるエア･インテークに繋げるためである.

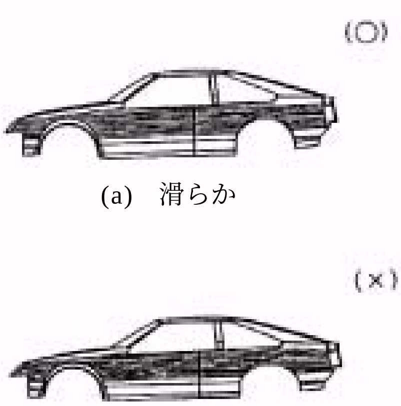
(2) ハイライトによる評価方法

ハイライトは特に天井や壁に複数の蛍光灯を平行に配置して, フェアリング (断面線の滑らかさを作り込まれた曲線を構成線として作成) された曲面をもつモデル表面に映し出される平行線の形状の変化具合や滑らかさを評価する手法である. その CG のアルゴリズムはまず, 図9に示すように断面線上のたくさんの点での傾き (法線方向) 角 (θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, …) を計算する. 次に, 多くの断面線を求め, その上で傾き角がそれぞれ θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, … である点を捜し



(a) 曲面の傾き（法線方向） (b) ハイライト曲線（平行線）

図9 ハイライトの原理図 [7)]



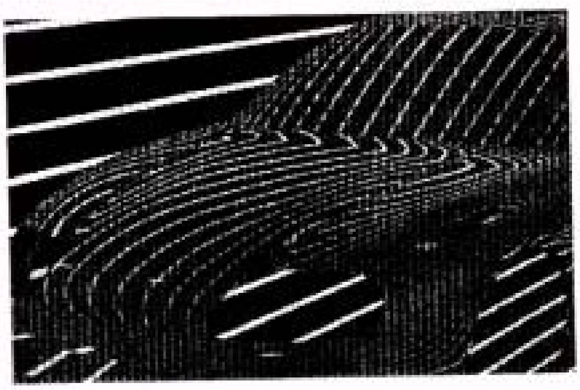
(a) 滑らか

(b) 滑らかでない

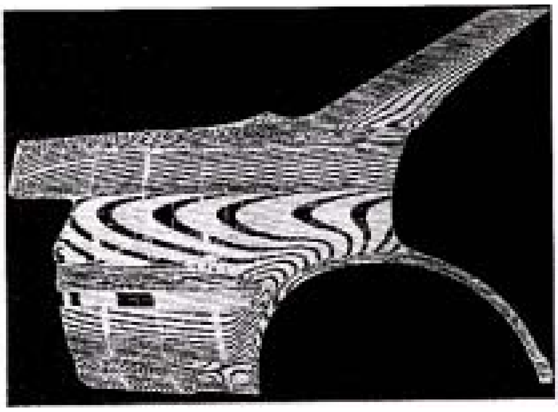
図10 ハイライトによる評価 [7)]

出す．最後に，傾き角が同じである点（各断面線上に1点ずつ）を曲線として結び，曲面に蛍光灯のような平行線を映り出す．曲面の曲率が大きいとハイライトは収束し（縞間隔が短くなり），逆の場合は発散する．また，面のうねりが評価できる．

図10はハイライト曲線を示す．図中(a)は(b)よりハイライトの平行性が良いので，(a)の滑らかさが高いことが分かる．図11はカーボディーのハイライトチェックの結果を示す．ハイライトの移り込みとその流れは黒と白の縞模様からなるのでゼブラ模様と呼ばれる．これにより面質の評価が可能である．



(a) 前部



(b) 後部

図11 カーボディーのハイライトチェック [7)]

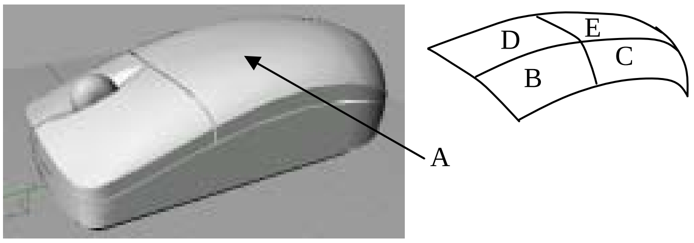


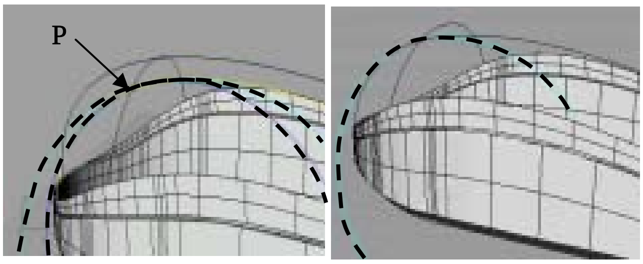
図12 マウスボディーのモデリング

４．マウスボディーモデリングへの応用

本研究では，3 次元 CAD ソフト Rhinoceros [8)] を用いて，図 12 に示すようなマウスボディーのモデリングおよび面質評価を行った．マウスボディーの上部後部の曲面 A は 4 枚の曲面 B, C, D および E から構成される．Rhinoceros に NURBS モデラーが取り込まれているので，B, C, D および E の各曲面自身が自動的に滑らかになっているが，曲面同士の接続の状態を知るのには滑らかさの評価が必要となる．Rhinoceros では曲面の評価をするツールとして，曲率分布，位置指定曲率解析，環境マッピング，ゼブラ解析，ドラフト角度解析などがある．ここでは実際に使用した評価のツールとマウスボディーの曲面 A の状態を解析する．

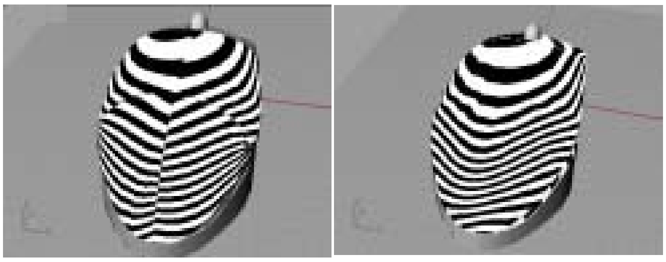
(1) 位置指定曲率分析

曲面同士の継ぎ目に測定点をあわせると曲率円が表示される．同じ点ならば曲率半径が同じになり曲面同士が滑らかに接続されていることになる．図13に，曲面Aを構成する右と左の曲面片の接続点P点での曲率分析結果を示す．図中(a)には，P点で両曲面片の曲率半径（破線の二つの曲率円）が異なるので，接続は滑らかではない．曲面片の接続を滑らかに修正すると，図中(b)のように曲率半径が同じ（破線の曲率円が一つ）になる．



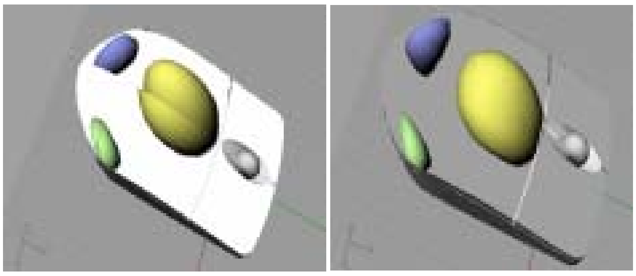
(a)滑らかでない接続　　(b)滑らかな接続

図13　曲率分析



(a)滑らかでない接続　　(b)滑らかな接続

図 15　ゼブラマッピング



(a)滑らかでない接続　　(b)滑らかな接続

図 14　環境マッピング

(2) 環境マッピング

光沢のある金属に周囲のシーンが映っているように見えるように，曲面にビットマップ（イメージ画像）を貼り付けて表示する．映り方によって曲面の欠陥を見つけ，設計の意図，滑らかさなどを確認する．蛍光灯環境マップはよく使われる．これは反射する金属の表面に蛍光灯を照らした様子をシミュレーションしたものである．図14はカラーボール環境マッピングの結果を示す．修正する前の曲面上に映っているパターンには，図中(a)のような途切れた部分やずれのある部分がある．修正した面上には，図中(b)のようになる．

(3) ゼブラマッピング

反射した縞模様（ストライプ）を曲面上に映し曲面の欠陥，曲面間の接線方向と曲率の連続性の状態を調べる．図15(a)は修正する前の曲面に沿った縞模様を示す．縞が一つの曲面から別の曲面へ移る時に横に飛んでいるので，曲面は接続されているものの，縞がよれている箇所で曲面上にキンクやクリークがあることを意味する．これは曲面間の連続性が G^0 であることを示す．また，曲面と曲面の境目で縞がきれいに並んでいるけれど境目で縞が急に方向を変えているので，曲面同士の位置と接線方向が合っていることを示す．これは曲面間の連続性が G^1（位置と接線方向）であることを示す．図15(b)に示すように，修正した曲面に沿った縞模様が滑らかに流れているので，曲面が滑らかであることを示す．この場合には，縞模様同士が合い，曲面上の境目で滑らかに接続し，曲面同士の位置，接線方向，曲率が合っていることを示す．これは曲面の連続性が G^2 であることを示す．

5．まとめ

本論文では，自由曲線･曲面の連続性の理論および実際の滑らかな形状の設計条件を述べ，CAD ソフトシステムに取り込まれている曲率分布とハイライトによる滑らかさの評価方法について考察を行った．また，曲率分析法，環境マッピング法，ゼブラマッピング法などの評価方法をマウスボディーモデリングへの応用を試みた．これらの方法は対話型設計にチェック機能として有効であるが，設計のプロセスと連動させ，評価と修正が自動的に行うことによって，設計作業時間が大幅に短縮されることが期待される．

参考文献

1．James D.Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, John F. Hughes 共著，佐藤義雄監訳，コンピュータグラフィックス理論と実践，オーム社（2001）．

2．黒瀬能聿，3次元図形処理工学，共立出版株式会社（2001）．

3．栄焕宗，Nonuniform B-spline mesh fairing method, CADDM, 1(1) (1991).

4．蘇歩青，劉鼎元，計算幾何，上海科学技術出版社（1981）．

5．Lott N J and Pullin D I, Method for fairing B-spline surfaces, CAD, 20(10) (1988).

6．高三徳，王啓付，周済，余俊，基於曲率差分的曲線曲面自動光順算法，計算機工程図学的探索与実践，（中国）電子工業出版社（1994）．

7．武藤一夫，CAD/CAM，工業調査会(2000).

8．Rhinoceros バージョン 3.0，Robert McNeel & Associates (2002).