●講座

図学と折り紙 (2)

Graphic Science and Origami (2)

三谷 純　*Jun MITANI*

1．はじめに

折り紙で形を作るとき，その折り操作にはカドとカドをあわせるなどして，パタンと平らに折りたたむ操作が大半を占めます．立体的な形に仕上がる作品もありますが，その途中の工程では平坦な状態であることがほとんどです．伝承折り紙として有名な兜やヤッコさん，セミは完成形まで平らなままで，鶴も最後に翼を広げるまでの各工程は平らに折りたたみます．このように，紙を平らに折る操作は折り紙の基本的な操作で，これを「平坦折り」と呼びます．

連載第２回目の今回は，このように紙を平らに折る「平坦折り」にまつわる話を紹介します．

2．平坦折り

平坦折りでできる折り線は必ず直線になります．そのため，平坦折りした紙の展開図はまっすぐな線分の集合となります．図１は，平坦折りで作られる「小鳥」の完成形とその展開図です．展開図は線分の集合で表されることが確認できます．

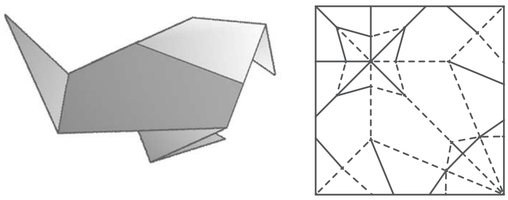


図１　小鳥を折った後の形（左）とその展開図（右）

平らに折りたたまれた状態は，折り紙の一般的な状態なので，古くから多くの方が研究の対象としてきました．その成果として，折り線が交差する点に着目すると，次の２つの性質が必ず満たされることが前川定理・川崎定理として知られています[1],[2]．

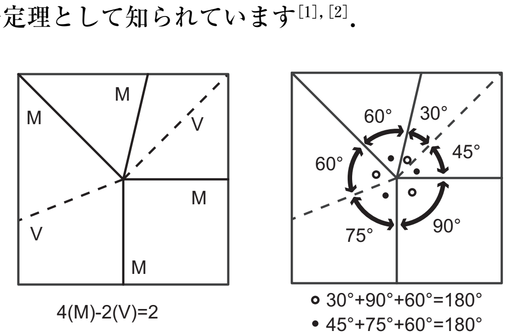


図２　前川定理（左）と川崎定理（右）の説明

［前川定理］「山折り」と「谷折り」の数の差は± 2

［川崎定理］ 1つおきの内角の和は180度

図２は，平坦折りした紙を開いたときに現れる展開図の例で，この２つの定理を満たしています．これ以外にも，さまざまな方法で折り畳んだ紙を実際に開いてみて，２つの定理が常に満たされていることを確認してみましょう．図１の小鳥の展開図も，すべての頂点において，この定理の示す条件が満たされています．

ところで，これらの定理が示すものは必要条件であって，十分条件ではありません．つまり平坦に折ることができる展開図は必ずこの２つの条件を満たしますが，この条件を満たすからと言って，必ずしも平坦に折ることができるわけではありません．

「局所的な」平坦折りに関する必要十分条件については，ここでは詳しく述べませんが，文献［３］のp227にわかりやすくまとめられています．

ここで「局所的」という言葉を使ったのは，ある１点だけに注目して，その点の近傍で折り畳めるかどうかを議論しているからです．部分的には折ることができても，大局的には（折り紙全体では）紙の衝突が起こって実際には折り畳めない，という展開図も存在します．このような「局所的には折れるけど大局的には折れない」という状況を理解するには，図３(a)の単純な展開図を考えるといいでしょう．２つの谷折り線を折ると，紙がぶつかって平らに折り畳めません．一方で図３(b)は紙がぶつからないので平らに折りたためます．図３(c)の展開図は少し複雑に見えますが，あらゆる点で上記の条件を満たし，なおかつ大局的に折りたためることが確認されています．是非実際に折り畳めることを（図を拡大コピーして）確認してみてください．あたえられた展開図が大局的に折りたたまれるか否かの判定はNP困難な問題で

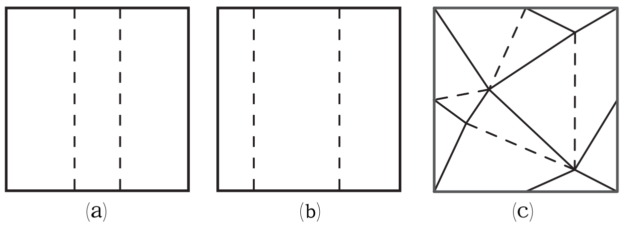


図３　(a)大局的には折れない展開図(b)，(c)大局的に折れる展開図

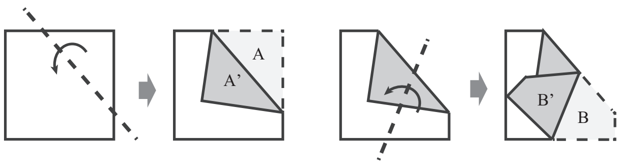
あることが知られているため[4]，「与えられた展開図を折る」というのはちょっとしたパズルとして楽しめます．

3．平坦折りと鏡映変換

ある図形を鏡に映した形に変換する「鏡映変換」と折り紙の折り操作は密接な関係を持っています．

ここで，平坦折りにおける折りの操作を考えてみます．平坦折りの場合，折り線は必ず直線で，折る操作は180度の角度で折ることになります（折り線を軸にして180度回転させる，つまり「折り返す」ということ）．折り紙を置いた面を上から見下ろすと，紙の一部を折り線によって鏡映変換したことになります．

図４(a)のように，折り紙のカドを破線で手前に折り返してみると，折り返す前のカドの形Ａと，折り返した後の形A'は鏡映の関係にあります．図４(b)はもう一度折った様子です．折った後では紙の重なり順が上下逆になりますが，２次元平面での形だけに注目すると，折る前の形Ｂと折った後の形B'は，やはり鏡映の関係になります．

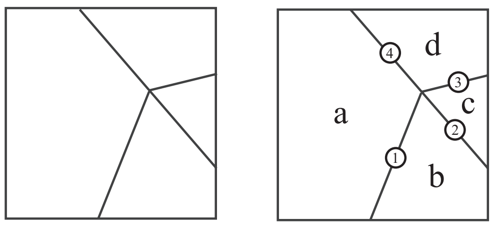


(a) (b)

図４　折り操作と鏡映変換

図４(b)を開くと，図５(a)のような展開図が得られます（ここでは山谷の区別をしないものとします）．

さて，この展開図から，折った後の「形」を一意に決定することはできるでしょうか．答えは「できる」です．輪郭線と折り線で囲まれた多角形に鏡映変換を施すことで，折った後の形を再現できます（ただし「紙の重なり方」はここでは議論しません）．説明しやすいように，図５(b)のように各領域に a~d，折り線に１～４の番号を振って説明してみます．



(a) (b)

図５　図４(b)の展開図

図６に示すように，まず多角形ａはそのままにして，ｂを１の線で折り返します（折り返したものに対しては図中のアルファベットに（'）を付けています）．続いて，２の線で多角形ｃを折り返します．ｂが既に反転済みなのでｃはそのままにします（反転の反転はそのまま）．さらに続いて，３の線で多角形ｄを折り返します．以上で，ａを固定した状態で折りたたんだ後のｂ，ｃ，ｄの位置が確定しました．折り線４は使っていませんが，折りたたんだ状態で，ａとｄが折り線４をちょうど共有する配置になります．

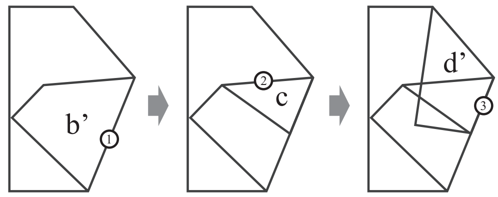


図６　折った後の形の決定

このように基準となる多角形を固定し，それに折り線を介して接続する多角形を順番に折りたたんでいくことで最終的に折った後の形を求めることができます．折りたたむ順番は任意です．上の例では，ａを固定して，b, c,d の順番に折りたたみましたが，これをｄ，ｃ，ｂの順番にたたんでも同じ結果になります（繰り返しになりますが，紙の重なり方，つまり多角形の重なり順は，これだけでは決定できません）．

それでは，もう少し具体的な例として，図７(a)を見てみましょう．これは鶴の展開図です．折り紙に詳しい人は，これを見てすぐに「鶴の展開図だ」とわかりますが，皆さんはどうでしょうか．右上が頭，左上と右下が翼，左下が尾に対応します．この展開図には，折り線で囲まれた多角形が全部で52個あります．このうちの１つを固定して，隣接する多角形を順番に折りたたみながらたどっていくと，図７(b)のような鶴の形が現れます．多角形を辿る順番は自由で，どのように辿っても同じ結果になります．もし，異なる辿り方で異なる結果になってしまったら，それは展開図に誤りがあった（そもそも平らに折りたためない展開図であった）ということです．

すでに述べた手順では，多角形を１つ辿るたびに鏡映

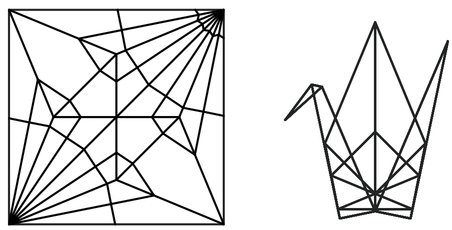

(a) (b)

図７　鶴の展開図と折った後の形

変換するので，隣り合う２つの多角形を取り出してみると，必ず「一方が元の形のままで，他方が鏡像」になり

ます．元の展開図に対して，折りたたんだ後で鏡像となる（裏と表が反転する）多角形に色を付けると図８ようになります．白とグレーの多角形が互い違いに並び，決して同じ色の多角形が並ぶことはない，ということを確認できます．

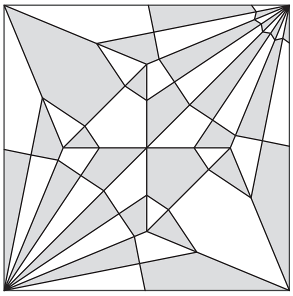


図８　折った後の向きによる色分け

４．平坦折りと紙の重なりの推定

それでは展開図から折った後の紙の重なり方を決定することはできるのでしょうか．ここでの紙の重なりとは，展開図に含まれる多角形領域が，折った後にどのように重なり合うか（各多角形領域の上下関係のこと）を言います．

あらゆる重なり方をしらみつぶしに試せば，展開図の情報と矛盾が無いものを見つけ出すことができそうな気がします．では，このアプローチは有効でしょうか．前回紹介したねじり折り（図９）のように，紙の重なり順にサイクルを持つものもありますから，各領域に１つずつ重なり順を割り振るだけではうまくいきません．互いに重なり合う多角形領域のすべての組み合わせに対して，どちらが上でどちらが下になるのかを割り当てる必要があります．図９に示す鶴の展開図の場合，多角形領域の数は52あるので，多角形領域のペアの数は52×51/２＝1326組あります．これらのうち，折った後で一部でも重なる関係にある多角形領域の組は638組あります．したがって，ペア毎にどちらが上になるかで２通りの可能性があるので，全体では2^{638}通り（約10^{192}通り）の可能性があることになります．とてもこれを全部調べるわけにはいきません．

実は，山谷の区別がつけられた展開図であっても，折った後の紙の重なり方を決定する問題はNP困難であることが示されています[4]．つまり，多角形の数の多項式時間で，重なり方を見つけ出すアルゴリズムは存在しないのです．

何か工夫しない限り現実的に解決できない問題であると言えます．

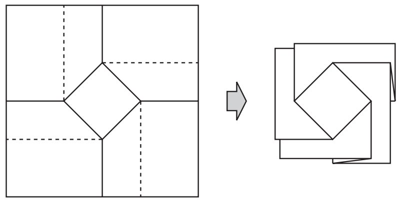


図９　ねじり折りは紙の重なり順にサイクルがある

以降で，現在Webで公開中のORIPA[5]に実装されている，紙の重なり方の決定方法を紹介します（これは，目黒俊幸氏が先行して開発したソフトウェアで採用されていた方式です）．ORIPAでは，山と谷の区別のついている鶴の展開図に対しても１秒足らずで可能な紙の重なり方をすべて見つけ出すことができます．

4.1　重なり決定のアルゴリズム

基本的な考え方を最初に説明しましょう．まず，折り紙全体の問題を局所的な紙の重なり順決定の問題に分割し，局所的に矛盾のない重なり方を選び出します．その後，全体で矛盾のない重なり方に統合することを行います．具体的には，次のような手順で行います．なお，以降では折り線で囲まれた領域のことをface，faceを分割して作られる多角形のことをsubface，折り畳んだ後の位置に応じてsubfaceをまとめたグループをsubfaceGroupと表記することにします．

⑴　展開図を折った後のfaceの位置と向き（表面が上を向いているか下を向いているか)を求める．
⑵　faceを複数のsubfaceに分割し，それらをsubfaceGroupにまとめる．（4.2節）
⑶　subfaceGroup単位でsubfaceの妥当な重なり順を求める．（4.3節）
⑷　すべてのsubfaceGroupで矛盾しない重なり関係を探す．（4.4節）

手順⑴は第２節で紹介したものと同じですので，以降では手順⑵，⑶，⑷の内容を説明します．

4.2　faceの分割とsubfaceGroupの作成

展開図を折りたたんだ後で，faceをその上を横切る他のfaceの輪郭線で複数のsubfaceに分割します．続いて，同じ位置，同じ形のsubfaceをグループ（subfaceGroup）にまとめます．図10の例ではF_1が４つに分割され，F_2，F_4は２つに分割されます．F_3は分割されません．分割されてできたsubfaceは４つのsubfaceGroup（図中のA～D）にグループ化されます．このグループ単位で妥当な重なり順を求め，その後に全体で矛盾のない重なりを求めることになります．

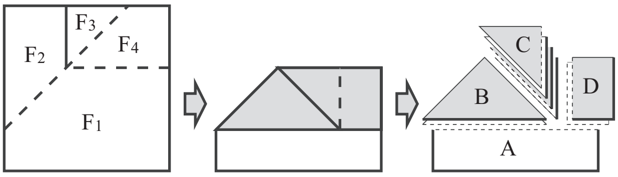


図10 多角形領域の分割とグループ化

4.3 subfaceGroup 内での妥当な重なり順

subfaceGroup 内で，subface を問題なく重ねられる方法を全て調べあげます．図10で示したように，subfaceGroup 内では，同じ形の subface が重なっているため，その境界に着目し，重なり順として適切でないものを除外します．図11は 1 つの subfaceGroup の輪部に着目した時の断面図の例で，取りうる subface の輪郭線（図11中の黒丸）の種類は次の 3 通りに分類できます．

$E_{boundary}$：紙の輪郭と一致する稜線（図10中の太い実線）

$E_{fold\_\{upper,\ lower\}}$：折り線と一致する稜線で，必ず 2 つ 1 組で存在する．面の向き（上を向いているか下を向いているか）および折り線の山谷の違いによって上に配置されるもの E_{fold_upper} と下に配置されるもの E_{fold_lower} を区別できる．（図10中の細い実線）

$E_{connect}$：face を分割することで生成された，折り線ではない稜線．隣接する subfaceGroup と共有される．（図10中の破線）

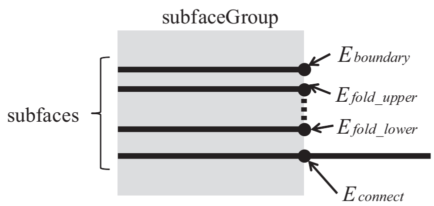


図11 subface の輪郭線のタイプ

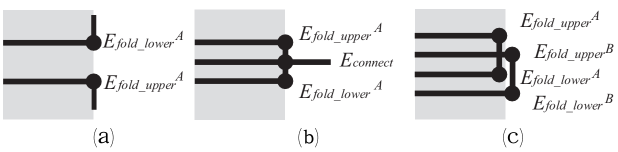


図12 適切でない重なり順

subfaceGroup 内で，順番に subface を重ねていった場合に，適切でない重なり順として，図12に示す 3 通りのパターンがあります．

図12の(a)が発生するのは，折り線の種類から決定される上下関係に反する場合です．(b)のケースでは互いに接続する E_{fold_lower} と E_{fold_upper} の間を他の面が横切って，紙が交差してしまいます．(c)は E_{fold_lower} と E_{fold_upper} のペアが複数存在し，それらが互い違いになっている場合で，やはり紙が交差してしまいます．これらのケースが含まれる重なり順は誤りなので，これらのケースがまったく含まれない重なり順だけを，その subfaceGroup における妥当な解として保持しておきます．

4.4 すべての subaceGroup で矛盾しない重なり方の構築

続いて，各 subfaceGroup で得られた重なり順が，全体で矛盾しない組み合わせを求めます．たとえば，subfaceGroup(A)では F_i が F_j よりも上に配置されているのに，subfaceGroup(B)では F_i が F_j よりも下に配置されているような場合（図13），必ずどこかで紙の交差が起きてしまうはずなので，これは不適切なケースとして除外します．

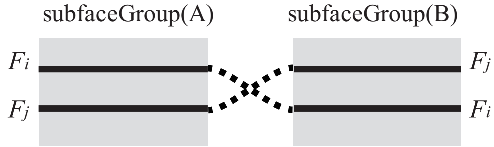


図13 subfaceGroup 間で不整合なケース

こうして最後まで残ったものが，実現可能な重なり方です．1 つの展開図にも，妥当な重なり方が複数存在します．たとえば図14は，この方法で兜の展開図から妥当な紙の重なり方をすべて列挙した様子を表しています．右下に，通常の折り方で得られる兜の例がありますが，これを含めて 9 通りの方法が，同じ展開図から復元されうることを確認できます．

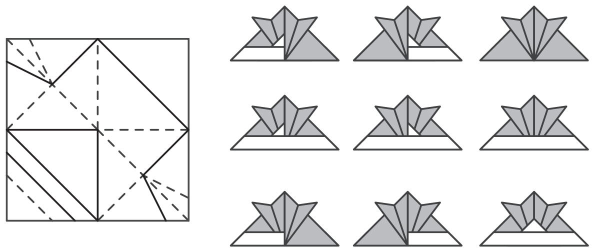


図14 兜の展開図から得られる 9 通りの異なる紙の重なり方

5．おわりに

連載第 2 回目の今回は，平坦折りの話を紹介しました．展開図から折った後の紙の重なり方を再現する問題は NP 困難であることが知られていますが，アルゴリズムを工夫することで，鶴程度のものであれば，すぐに妥当な結果を見つけ出すことができます．ORIPA では，鶴の展開図から得られる折り方として 5 通りのものを発見しました．通常の折り方と違う 4 通りはどのようなものでしょう．是非，実際に手を動かして試してみてください．

参考文献

［1］ 前川淳作，笠原邦彦編著，『ビバ！おりがみ』，サンリオ，1983.

［2］ T. Kawasaki, On the relation between mountain-creases and valley-creases of a flat origami. In Proc.1 st International Meeting Origami Science and Technology, pp. 229–237, 1989.

［3］ E. D. Demaine, D., J. O'Rourke，上原隆平（訳）幾何的な折りアルゴリズム，近代科学社，2009.

［4］ M. Berm, B. Hayes. The complexity of flat origami. In Proc. 7 th ACM-SIAM Symposium Discrete Algorithms, pp. 175–183, 1996.

［5］ J. Mitani，ORIPA，http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/oripa/

●2012年８月８日受付

みたに　じゅん

筑波大学大学院システム情報系　准教授

2004年，東京大学大学院工学系研究科精密機械工学専攻博士課程修了．博士（工学）．2011年より現職．CG，形状モデリングに関する研究に従事．

mitani@cs.tsukuba.ac.jp