●講座

図学と折り紙（４）

Graphic Science and Origami (4)

三谷 純　*Jun MITANI*

１．鏡映変換と立体的な折り

これまでの連載では，主に平らに折る折り紙に注目した話をしてきました．とくに連載第２回では，この「平坦折り」の操作は，多角形の一部を平面上で鏡映変換する操作に相当することを紹介しました．今回は，紙で立体的な造形を作る「立体折り紙」の設計においても，この鏡映変換の考え方が適用できることを紹介します．平坦折りでは，折り線は必ず直線になりますが，立体的な折り操作では曲線で折ることが可能です．曲面に対する折りをコンピュータで計算することで，鶴や兜のような伝承折り紙とは違った，滑らかな曲線折りを持つ立体作品も作れるようになります．鏡映変換は折り紙ととても相性の良い幾何操作なのです．

２．１枚の紙で作ることができる曲面

１枚の紙に切込みを入れたり皺を加えたりせず，曲げるだけで作れる滑らかな曲面は，可展面（developable surface）と呼ばれます．今回紹介する立体的な折り操作は，この可展面に対して行われます．幾何学的な特徴から分類すると，可展面は線織面（ruled surface）と呼ばれる曲面の１つですので，まず線織面について簡単に説明しましょう．

３次元空間で直線を連続的に移動させた軌跡として得られる曲面が線織面です．線が織りなす曲面という表現は素敵ですね．この曲面上の点は次のような形でパラメトリック表現できます[1]．

$$p(u,v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

$\gamma(u)$は線織面上の曲線を表し，$\delta(u)$はその曲線上の点を通過する直線の方向ベクトルを示します．線織面上の任意の点において，その点を通る直線が曲面上に存在します．そのため「直線エレメントを持つ」と表現されることもあります．工学的な観点からは，直線状の部材を組み合わせて表現できる曲面であるため，建築物の構造に用いられることも多いです．図１左端に示す双曲放物面（Hyperbolic Paraboloid）は可展面で無い線織面の代表的な形状の１つです．

可展面は線織面の一種であり，直線エレメントを持ちますが，さらにあらゆる点でガウス曲率がゼロであるという特徴があります．可展面は歪みなく平面に展開でき，曲面上での２点間の距離は，展開前と展開後で変化しません．このような性質を持つ最も単純な曲面は平面ですが，それ以外は柱面，錐面，接線曲面に分類されます（図１）．

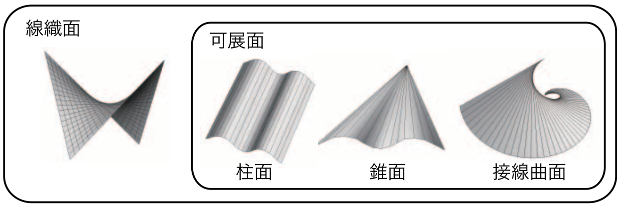


図１　曲面の分類．可展面は線織面の一種．

柱面は直線エレメントが互いに平行で，錐面は直線エレメントが１点で交わります．接線曲面は，空間曲線への接線の集合がつくる曲面です．曲面を含む折り紙作品には，必ずこれらの可展面が含まれることになります．

ところで，図１に示す可展面からどれか１つ選んだとして，それでバリエーションに富んだ形を表現することは困難です．そこで，複数の可展面を接合して立体形状を表現する手法を考えます．３次元空間で接続する可展面どうしが２次元の展開図上でも重なりや隙間を生じずに配置できる場合，この曲面は平面に「折り」と「曲げ」を加えるだけで再現できることになります．この可展面を組み合わせた形の生成に鏡映変換の操作を活用できます．

３．可展面の鏡映変換

可展面の一部を鏡映変換した形は１枚の紙で作ることができます．これは，元の形が可展面の一部であれば，それを鏡映変換させた形もやはり可展面であることと，可展面を横切る平面で一方を鏡映変換させれば，紙の連続性が保たれるという事実に基づいています．このことは図２を例に，次のように示すことができます．

「可展面Sを平面が横切ることで，Sを２つの面s_1とs_2に分割するとき，s_2'を，その平面によるs_2の鏡像とする．すると，s_2'はs_1と隙間なく接続し，さらにs_2'の展開図はs_2の展開図と合同なために，s_1の展開図とs_2'の展開図も隙間なく接続する．つまり，可展面を横切る平面によって，元の面の一部を鏡映変換させた形状も，やはり１枚の平面から作ることができる形となる」

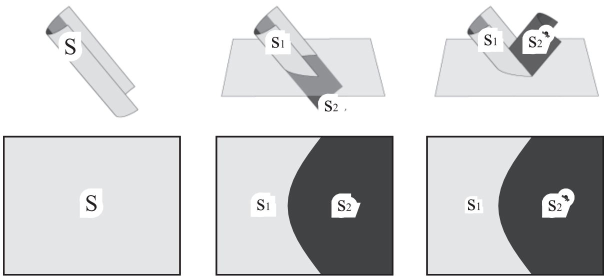


図2　（左）元の可展面 S とその展開図．（中央）S を横切る平面によって２つの領域 s_1と s_2に分割する．（右）s_2を平面で鏡映変換させて s_2'とする．展開図に変化は無い．

このように，１つの可展面からスタートして一部分を鏡映変換させる操作を繰り返すことで，１枚の紙を折って作れる形を構築することが可能です．

ただし，このような操作で得られる折り線は可展面と鏡映面が交差する位置に発生するため，平面曲線に限定されます．紙は空間曲線で折ることができることも知られています．しかしながら，Fuchs と Tabachnikov は文献［２］において，「折り線が閉曲線で無いのであれば，折り線が平面に載るような状態で安定する」と記述しています．これが正しければ，今回対象とする平面曲線での折りは，物理的に安定しやすい形状ということができるでしょう．また，ここの議論では，鏡映変換した後の形が，元の形とぶつかってしまう自己干渉については何も述べていないことに注意してください．実際には紙の干渉が起きないように気を付けながら鏡映変換する必要があります．

４．円錐への複数回の鏡映変換の適用

ハフマン符号を発明した David Huffman 氏は数学者として有名である一方で，曲面を含む折り紙作品を数多く作成した折り紙創作家としての顔も持ち合わせています[3]．氏の作品には，円錐面を含む折り紙作品が多くあります[4]．円錐は扇形をした紙を丸めて作ることができ，円錐を横切る平面に対して，どちらか一方を反転させて（鏡映を作って）得られる形も，やはり同じ扇形の紙から作ることができます（図３）．鏡映面を水平から少し傾ければ図４のような興味深い形を得られます．この例では，円錐の頂角を60度に設定しているため，展開図はちょうど半円となります．

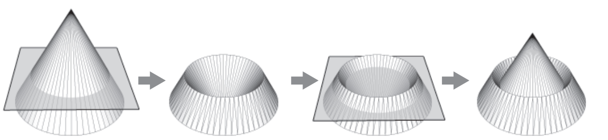


図３　円錐の頂点を含む側を平面で反転させる操作．得られる形は最初の円錐と同じ展開図から作れる．

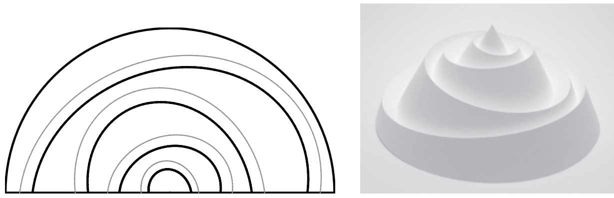


図４　円錐に対する鏡映変換で得られる形の展開図（左）と，紙で作った写真（右）

５．側面線と掃引軌跡を指定した柱面の折り操作

前節の方法と同じ考え方で，柱面に対して鏡映変換を適用することでも，さまざまな形を作ることができます．図５に示すように，側面線を決定し，まっすぐ掃引すると柱面が得られます．これに鏡映変換を適用することで，新しい折りを追加できます（図６）．

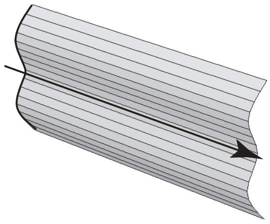


図５　側面線（太線で示した曲線）を矢印で示す軌跡で掃引すると，柱面が得られる．

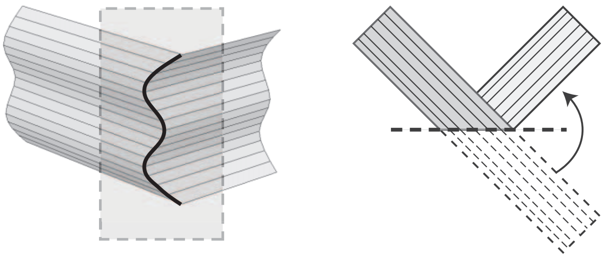


図６　柱面を横切る平面で一方を鏡映変換すると，新しい折りを追加できる．

柱面は直線エレメントが平行であるため，展開すると長方形になるという特徴があります．鏡映変換による折りを追加しても展開図は変わらず長方形のままです．また，柱面を構成する直線エレメントを水平に置いたとき，この折り操作に用いる鏡映面を垂直な平面に限定すると，３次元空間における直線エレメントは常に水平なままとなります．つまり，折りを適切に行えば，ぐるりと一周まわって元の位置に戻ってくるため，円筒のように閉じた形を作ることができます．この性質を活用することで，のちほど紹介するような幾何学的に興味深い形を多く作ることが可能になります．

ところで，鏡映面によって折りを加えられるという原理がわかったとしても，筒になるように端の位置を正確に一致させたり，意図した形になる展開図を作図することは，なかなか簡単には実現できません．そこで，コン

ピュータを用いてインタラクティブに形を設計することを考えてみます．

そもそも，意図した形を決定するために必要な鏡映面の位置を正確に決めることは困難です．なぜなら，３次元空間に平面を正確に配置する操作は難しく，面の向きが少し変わっただけで得られる結果が大きく変化することがあるからです．

そこで，折れまがった掃引軌跡を入力し，そこから鏡映面の位置を算出することを考えます．つまり，掃引軌跡を折れ線とし，その各頂点に図７に示すようにして，角の二等分線が法線となるような鏡映面を配置すればよいのです．このようにして配置された鏡映面で折り操作を行うと，得られる形状が掃引軌跡の折れ線と重なります．

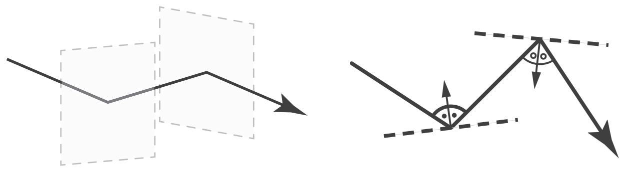
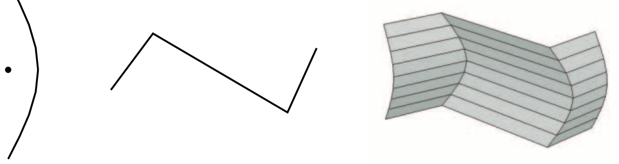


図７　鏡映面によって掃引軌跡の進路が反転する（左）．逆に掃引軌跡から鏡映面の位置を定める（右）．

掃引軌跡が水平面上に乗り，鏡映面が垂直であることに限定すると，掃引軌跡は目的の形の上面図であるとみなして，直観的に形をデザインできることになります．こうして，側面線と掃引軌跡という２つの折れ線だけを入力として，直観的かつ容易に形を設計できるようになります（図８）．この２つの入力線から，３次元形状をコンピュータで自動生成すれば，さまざまな形を試行錯誤できます．このような設計方法については文献［５］に詳しくまとめられています．

例えば，図９に示すように，この方法でミウラ折りや吉村パターン（ダイヤモンドパターン）のような，良く知られた折りのパターンが同じ原理で作り出されることを確認できます．同じジグザグの側面線を用い，それらをまたジグザグに掃引すればミウラ折り，正多角形に掃引すれば吉村パターンになります．

他にもさまざまな形が作れます．その一部を図10に示



(a)　(b)　(c)

図８　(a) 側面線．中央の点は掃引軌跡の端点の位置．(b) 掃引軌跡．(c) 与えられた側面線と掃引軌跡から生成される立体．１枚の紙を折って作ることができる．

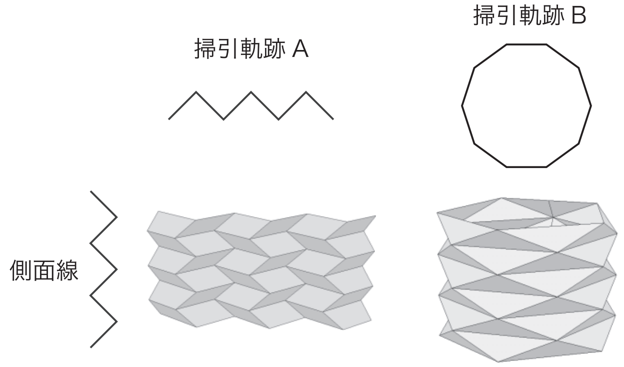


図９　ミウラ折り（左）と吉村パターン（右）の生成例．どちらも同じ側面線から，掃引軌跡を変えることで生成される．

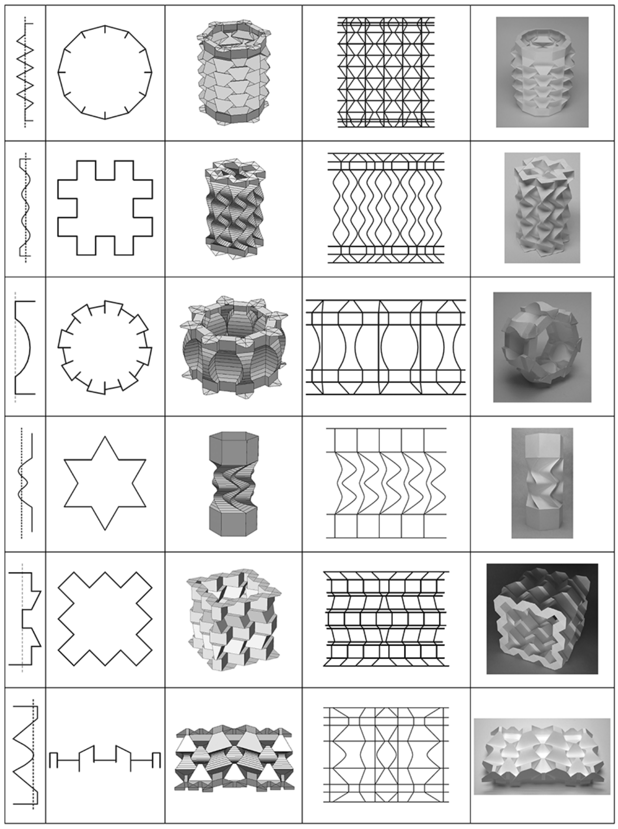


図10　柱面を折り返すことで作られる形の例．図の左から順に，側面線，掃引軌跡，３DCG モデル，展開図の一部，実際に作った折り紙の写真．

します．図10では一番下の例を除くすべてが，筒状に閉じる形をしています．

これまでの例では，柱面を構成する直線エレメントは水平で，鏡映面は垂直に置くものとしていましたが，この鏡映面を傾けることで，さらに得られる形の自由度は増します．図11に示す形は，曲面部分を作るために鏡映面を傾けています．このように，さまざまな形を作れる可能性が広がる一方で，紙が干渉したり，筒状にしっかり閉じる形状にすることが難しいなど，形の制御の問題が生じます．

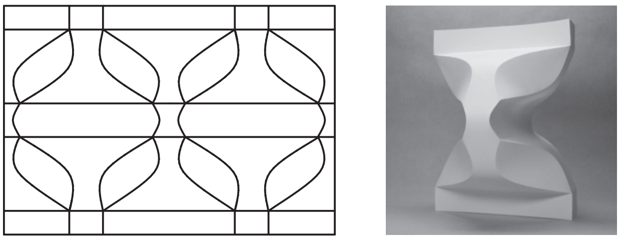


図11　柱面の直線エレメントに垂直でない鏡映面での折り返しを使用した形の例．

5．他の可展面への複数回の鏡映変換の適用

これまでの説明から，任意の可展面に対して鏡映変換による折り操作を施せることがわかりました．前節では，柱面の掃引軌跡を折れ線で入力することで，さまざまな形を作れることを示しました．しかし，この方法は初期形状が柱面に限定され，また直線エレメントに垂直でない鏡映面の配置には困難が伴いました．

文献［６］では，このような問題を回避できる設計手法が紹介されています．提案された設計システムでは，ユーザはマウス操作で曲面上の点を選択し，その点を単にドラッグ操作することで，直観的に立体折り紙の設計を行えます．鏡映面は，選択した点の初期位置と，マウスカーソルの位置の垂直二等分面として自動的に算出されます．容易にデザインの試行錯誤を行うことができ，図12に示すような形を作り出すことができます．

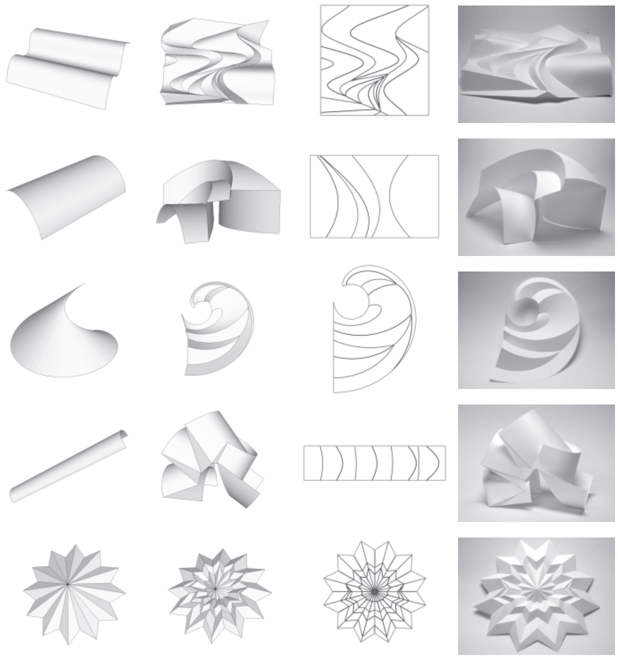


図12　文献［６］で示された方法で設計された形．左から順に初期形状，編集後の形状，展開図，立体折り紙の写真

6．おわりに

今回は立体的な折り紙の形を設計するときに，「可展面の一部に鏡映変換を施す」という簡単な方法でさまざまな形を作れることを示しました．一方で，このアプローチでは翼を開いた状態の鶴や，升や箱のように，一部がコンパクトに折りたたまれた状態の立体を作り出すことは困難です．近年では，これとは異なるアプローチとして，立体を多面体で表現し，それを展開図にしてから隙間を襞で埋めてつじつまを合わせる方法も提案されています[7][8]．また，空間曲線での折りを扱う研究も最近になって行われるようになってきました[9]．

このような分野では，もはや折り紙の研究にコンピュータによる幾何処理が必須であり，まだ研究の歴史も浅いことから，今後の発展の余地が大いに残されているものと思います．

参考文献

［１］ 梅原雅顕，山田光太郎：曲線と曲面，裳華房（2002）

［２］ Fuchs, D., and Tabachnikov, S., More on paper-folding. The American Mathematical Monthly 106 (January), 27–35 (1999)

［３］ Wertheim, M., Cones, curves, shells, towers : He made paper jump to life. The New York Times, June 22 (2004)

［４］ Demaine, E., Demaine, M., Koschitz, D. : Reconstructing davidhuffman's legacy in curved-crease folding, in Proc. of 5 OSME (2010)

［５］ Mitani, J., Column-shaped origami design based on mirror reflections, In Proc. of ICGG 2012 (2012)

［６］ Mitani, J., Igarashi, T., Interactive Design of Planar Curved Folding by Reflection, in Proc. of PG 2011, (2011)

［７］ Mitani, J., A Design Method for 3D Origami Based on Rotational Sweep, CAD & A, 6(1), pp. 69–79 (2009)

［８］ Tachi, T., Origamizing Polyhedral Surfaces, IEEE TVCG, 16(2), pp. 298–311 (2010)

［９］ Tachi, T., and Epps, G., Designing One-DOF Mechanisms by Rationalizing Curved Folding, In Proc. of ALGODE 2011 (2011)

●2013年２月10日受付

みたに　じゅん
筑波大学大学院システム情報系准教授
2004年，東京大学大学院工学系研究科精密機械工学専攻博士課程修了．博士（工学）．2011年より現職．CG，形状モデリングに関する研究に従事．
mitani@cs.tsukuba.ac.jp