

図学と折り紙（5）

Graphic Science and Origami (5)

三谷 純 Jun MITANI

1. 平織り (Tessellation)

紙を折ることによって生まれる幾何学的な造形を楽しむ分野の一つに、平織り (Origami Tessellation) と呼ばれるものがあります。図1に示す例のように、平織りには幾何学的な基本パターンを並べることで平面を充填させる特徴があります。モザイク模様のように見え、光を透かせて陰影を楽しむこともできます。このような折り技法は、服飾に用いられるプリーツにも見られ、古くから多くのパターンが知られています。近年ではコンピュータを用いたパターン設計も可能となり、新しい折り模様は今も多くの愛好家によって創作されています。連載5回目の今回は、この平織りについて紹介します。平織りは、全体の折り線が互いにリンクしていて、折るときには全体を一度に折る必要があります。そのため、綺麗に仕上げるには手間がかかりますが、できたときの喜びはその分大きなものです。図を見るだけでは完成形をイメージするのが難しいでしょうから、是非実際に手を動かして折ってみてください。

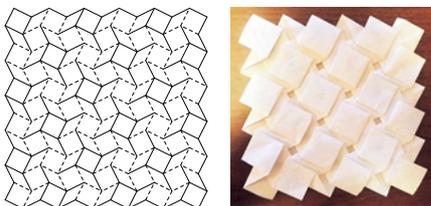


図1 平織りの例

2. ねじり折り

平織りと呼ばれるものの多くは連載第1回で紹介した「ねじり折り」を構成要素とし、平坦に折りたためます。ここではまず、ねじり折りについてより深く見ていきましょう。

2.1 正方形を基本としたねじり折り

正方形をベースとしたねじり折りは、図2に示すような折り線から構成され、一般的な折紙用紙から簡単に折り出すことができます。図2左に示す展開図では45度傾いた正方形が中央に置かれ、水平、垂直方向に折り線が伸びています。これを折りたたむと、図2右のようになりますが、この際に中央の正方形が反時計回りに90度回転します。紙をねじるようにして折りたためるのでねじり折りと呼びます。

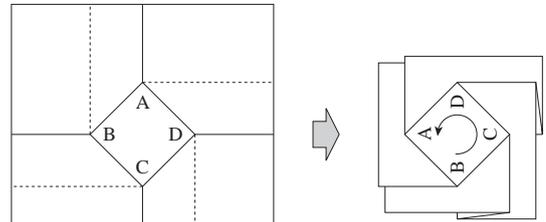


図2 正方形を基本としたねじり折り

2.2 鏡像パターンの連結

図2に示したねじり折りは、一方を鏡映反転することで図3のように連結できます。この連結したパターンは互いに干渉することなく、整合性を保ったまま折りたたむことができます。互いに運動するので、実際に折るときには、両方をいっぺんに動かすようにします。一方は他方の鏡像なので、ねじる方向は逆になります。

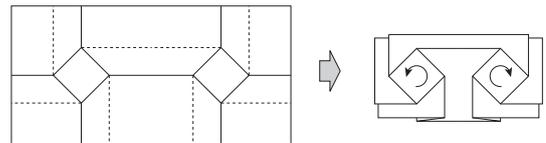


図3 ねじり折りの鏡像の連結

さらに、図3のパターンを水平線で鏡映反転して連結すると図4のパターンができます。中央部に大きな閉領域ができますが、これも問題なく折りたためます。

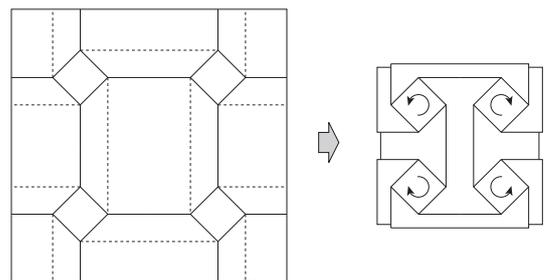


図4 4つのねじり折りの連結

以上の考察から、正方形を基本とするねじり折りは図5に示すようにいくつでも連結でき、平面上に敷き詰められることがわかります。互いに隣接するねじり折りは、一方が他方の鏡像になります。これが平織りの1つの例になります。図2の展開図における、中央部の正方形の大きさの比率を変えることで、異なる印象の平織りを作り出すことができます。

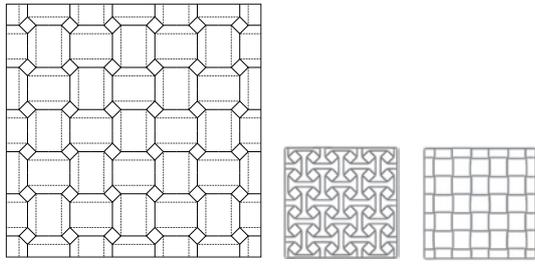


図5 正方形を基本とするねじり折りから作られる平織りの例. 左から展開図, 表面, 裏面. 実際に折った後は, 展開図に比べると小さくなる.

2.3 山谷反転パターンの連結

先ほどの例では, 鏡映反転を使って隣り合うねじり折りのパターンを連結していましたが, 図6のように折り線の位置はそのままにして, 平行移動させて連結することもできます. その際に, 山谷の符号を反転させます. 一方の正方形は裏側に現れることになります.

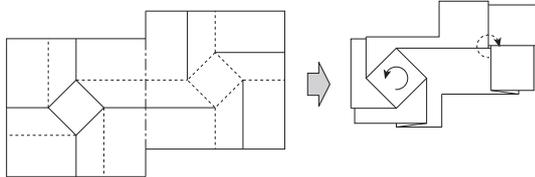


図6 山谷が反転した2つのねじり折りの連結

このようなパターンもやはり連結を繰り返して平面を充填できます. 4つ連結させると次のようになります. 図4の鏡像を用いたものと異なり, 裏と表は区別なく同じになります.

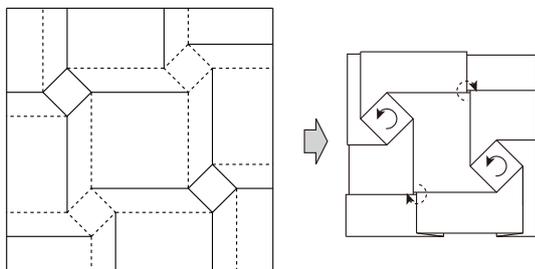


図7 山谷が反転した4つのねじり折りの連結

2.4 正方形のねじり折りを基本としたパターンのバリエーション

図2のねじり折りは平坦に折りたためますが, なぜ折りたためるかを改めて考察してみましょう. 連載第2回で紹介したように, 平坦に折りたたまれる展開図の頂点に注目すると, 1つおきの内角の和が180度であるという法則(川崎定理)があります. 図2の頂点Aを見てみると, 正方形の内部から反時計回りに90度, 45度, 90度, 135度であり, 確かにこの法則が成り立つことが分かります. 基本となる中央の多角形が正方形なので最初の90度は固定です. すると, それと対を成す角も90度で固定となります. 残りの角に注目すると, これは45度と135度に限定されることがわかります. 一方を θ とする

と, 他方は $180^\circ - \theta$ となり, θ の値は自由に設定できます. 例として, 正方形の傾きを変えて θ を20度にしたパターンは図8のようになります(折った後の図は隠れて見えない折り線も表示しています). 角度を小さくすると, 重なる領域が小さくなり, 裏側には正方形の隙間が生まれることになります.

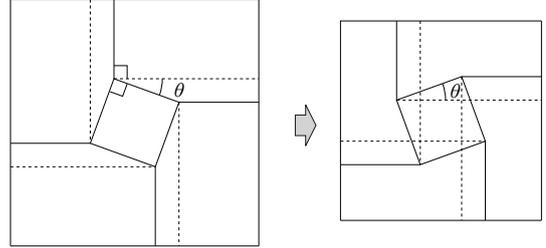


図8 中央の正方形の傾きを変えたねじり折り

傾きの角度を変えたねじり折りのパターンも, これまでの例と同様の方法で連結し, 平面上に敷き詰められます. このバリエーションは, 基本となる正方形の大きさと, 回転させる角度 θ の値という2つのパラメータで形を決定できます.

図8のねじり折りに, 2.1節で述べた鏡像パターンを連結する方法(図4)を適用すると, 折った後の裏側はとても興味深い外観になります. 図9,10に示すように, 1枚の紙を折っただけでありながら, まるで複数の帯が互い違いに交差した織物(文字通り「平織り」の外観)のように見えます.

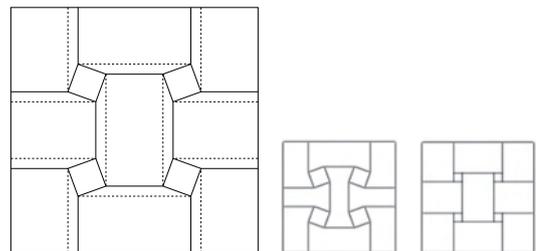


図9 図8のねじり折りを4つ連結したパターン. 左から展開図, 表面, 裏面

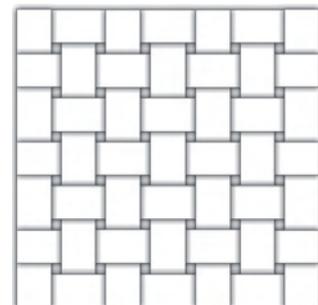


図10 図8のねじり折りを充填した裏側はまるで織物のように見える

2.2 正三角形、正六角形をベースとしたねじり折りのバリエーション

正方形のねじり折りだけでも、いろいろなバリエーションを作れることを確認しましたが、平面を敷き詰められる正多角形には、ほかにも正三角形と正六角形があります。そのため、図11に示すねじり折りも、これまでと同様にして平面を充填することができます。

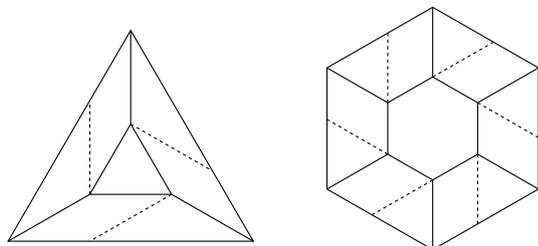


図11 正三角形、正六角形のねじり折りの基本パターン

正三角形と正六角形、それぞれを敷き詰めたタイリングパターンは双対の関係（各タイルの中心を連結して作られるパターンが他方と同じものになるという関係）を持つため、図11の基本パターンを敷き詰めて得られるものは結果としてどちらも図12に示すものになります。よく見ると、正三角形のねじり折りと正六角形のねじり折りが混在していることがわかります。

正三角形を平面に敷き詰めると1つの頂点に6つのタイルが接続するので、山谷の反転または鏡映のパターンを交互に配置できます。一方で、正六角形の場合は1つの頂点に3つのタイルが接続するので、山谷反転または鏡映のパターンを交互に配置できず、図11とは異なる山谷の付け方で折りたたむことになります。

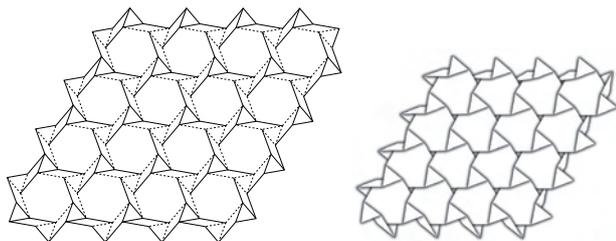


図12 正三角形と正六角形のねじり折りから作られる平織りのパターン(左)と、それを折りたたんだ様子(右)

3. 異なる正多角形によるタイリング

これまででは、同一の多角形を敷き詰めて作るパターン（正平面充填形と呼びます）に基づく平織りを見てきました。それでは、異なる正多角形の組み合わせによる平面充填のパターン（Uniform Tiling）からも平織りを作り出せるでしょうか。この問いに対する回答はYESです。異なる正多角形を敷き詰めてできるタイリングについても、図13に示す「縮小して回転させる」という手順で、平らに折りたたまれる展開図を作ることがBatemanに

よって紹介されています^[1]。まず、平面に敷き詰めた各正多角形を、その重心を中心として同じ比率で縮小します。すると隙間ができるので、もともと同じ場所にあった頂点同士を連結して、新しい多角形を作ります（同じ場所にあった頂点が4つの場合は四角形が作られます）。続いて、縮小した多角形を一定角度だけ回転させます（新しく作った多角形もそれに合わせて回転します）。不思議に感じられますが、このようにして作られたパターンは、各頂点が局所平坦折り条件を満たすので、平坦に折りたたむことができます。このようなアプローチで平織りの展開図を生成できるソフトウェアTessがインターネット上で公開されています^[2]。

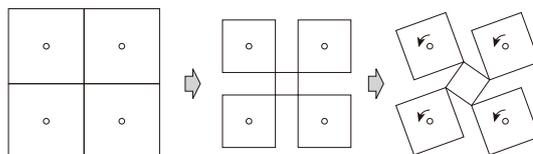


図13 縮小して回転させる操作

正多角形の組み合わせで平面を充填するタイリングパターンの中で、すべての頂点の形状が一般的なパターン（アルキメデスの平面充填と呼ばれます）は正平面充填形を含めれば全部で11種類ありますが、頂点の形状が一般でなくてもよいのであれば、それらは無数にあります。したがって、この「縮小して回転させる」という驚くほど簡単な操作で、無数の平織りパターンを生成できるのです（図14）。

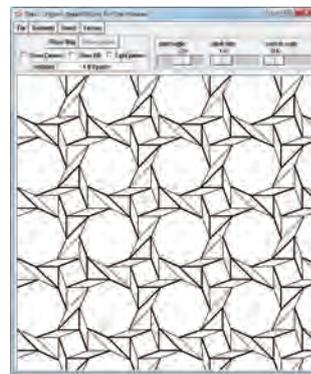


図14 異なる正多角形（正八角形と正方形）の組み合わせによるパターン（Tessの画面）

では、この「縮小して回転させる」という操作で平織りパターンを作る方法は、正多角形のタイリングだけに有効なのでしょうか。いえ、この操作は非常に強力で、「隣接する2つのタイルの回転中心を結ぶ線と、2つのタイルが接する辺の成す角が90度である」という条件を満たせば、どのような形のタイルの組み合わせでも実現可能なことがLangとBatemanによって示されています^[3]。

無限に広い平面を充填するには、何かしらの周期性が必要になりますが、ボロノイ図はこのような条件を満たしますので、図15に示すようなランダムな点群によって生成したボロノイ図からも、「縮小して回転させる」という操作で平坦に折りたためる折り線を生成できます。

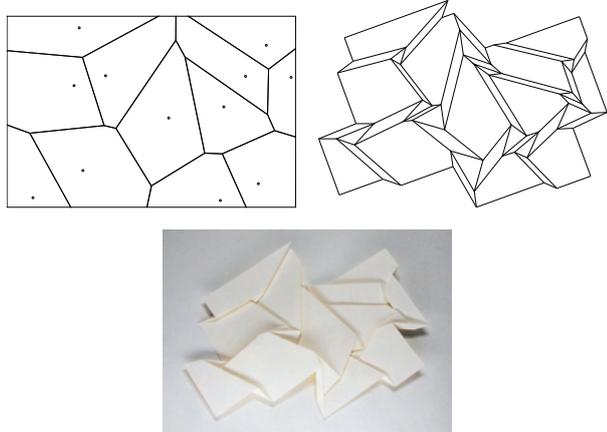


図15 ランダムな点群から生成したボロノイ図（左上）、各多角形を30%縮小させて20度回転させて作った展開図（右上）、展開図を折りたたんだ様子（下）

4. 立体的な基本要素の配置

これまでは平らに折りたたまれるものに限った話をしてきましたが、さらに対象を広げて立体的な折り構造のタイリングについて考えてみましょう（海外では Origami Corrugations と呼ばれることもあります）。筆者が開発した ORI-REVO というソフトウェア^[4]で作られる折り紙の形の1つに、図16に示すような、多面体の外側に三角錐状の突起がついたものがあります。この形状は展開図および折った後の底面が正多角形になるので、やはり平面上に敷き詰めることができます。図中の丸で囲った部分の幅を隣接する構造体と一致させることで、異なる立体形状を連結させることも可能です。正多角形から構成されるタイリングパターンに対しては、このような立体構造を配置できることになります。

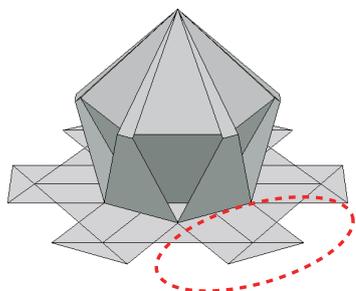


図16 ORI-REVOで設計できる立体的な構造を持つ折り紙

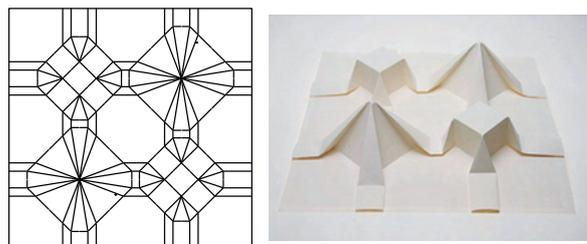


図17 異なる立体構造の組み合わせ

5. おわりに

今回は周期的な折りのパターンで幾何学的な造形を作り出す平織りについて紹介しました。ねじり折りを組み合わせて作るパターンには際限がなくさまざまなものがあること、そして立体的な折り構造をもつ形も組み合わせられることを紹介しました。もちろん、ねじり折り以外の折りを組み合わせることも可能です。多くの折り紙作家による、装飾の美しい作品がインターネット上には多数公開されています^[5]。平織りは、紙による造形のとても興味深い分野の1つです。

参考文献

- [1] アレックス・ベイトマン, 平織り (折り紙テッサレーション) デザインのためのコンピュータ・ツールとアルゴリズム, 折り紙の数理と科学, Thomas Hull編, 森川出版, 第12章 (2005)
- [2] Alex Bateman, Tess : origami tessellation software, <http://www.papermosaics.co.uk/software.html>
- [3] Robert J. Lang, Alex Bateman, Every Spider Web Has a Simple Flat Twist Tessellation, Origami 5, CRC Press, pp.455-473 (2011)
- [4] Jun Mitani, ORI-REVO : A Design Tool for 3D Origami of Revolution, http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/ori_revo/
- [5] Origami Tessellations, <http://www.flickr.com/groups/origamitessellations/>

●2013年5月10日受付

みに じゅん

筑波大学大学院システム情報系 准教授
2004年, 東京大学大学院工学系研究科精密機械工学専攻博士課程 修了.
博士(工学). 2011年より現職. CG, 形状モデリングに関する研究に従事.
mitani@cs.tsukuba.ac.jp